

Wahlaufgaben

Aufgabe 2008 W4b:

Das regelmäßige Sechseck hat die Seitenlänge $\frac{3}{2}e$.

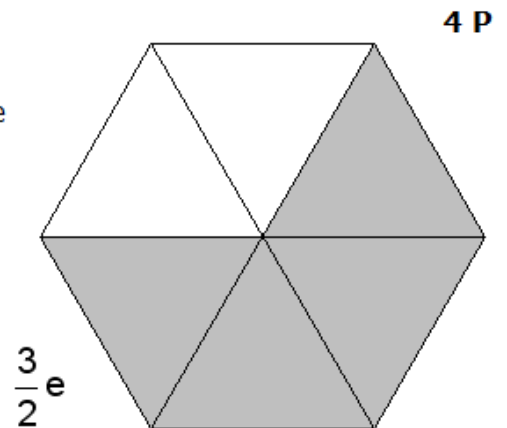
Die vier grau eingefärbten Dreiecke bilden die Mantelfläche einer quadratischen Pyramide.

Berechnen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte das Volumen der Pyramide in Abhängigkeit von e .

Der Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche der Pyramide wird mit φ bezeichnet.

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\tan \varphi = \sqrt{2}$$



Strategie 2008 W4b:

Gegeben:

Quadratische Pyramide

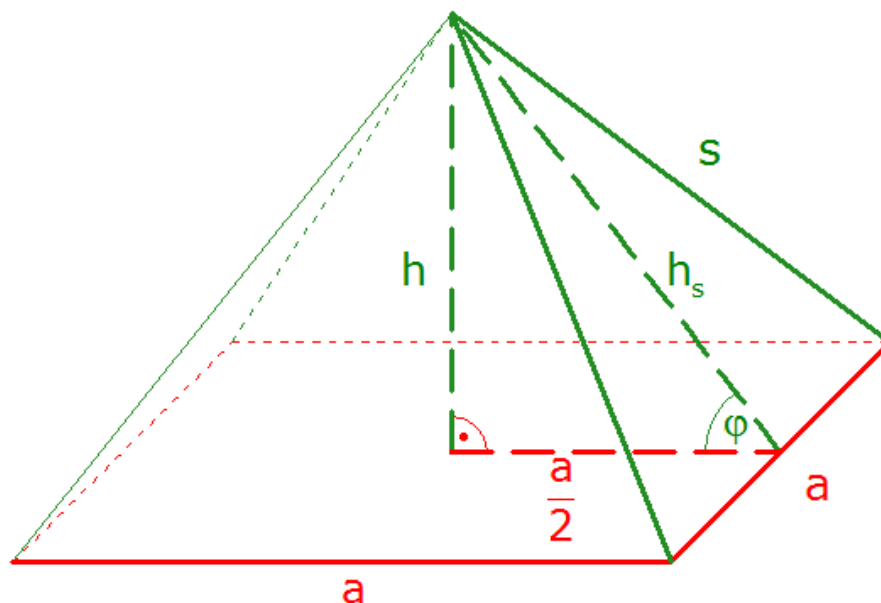
$$a = \frac{3}{2}e$$

Gesucht:

V_{Pyramide}

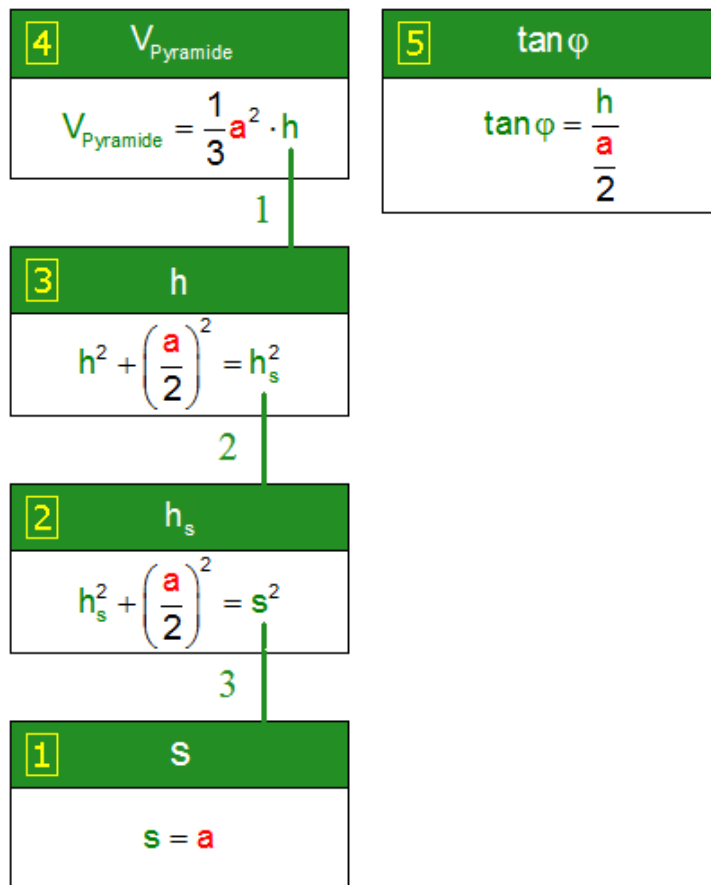
$$\tan \varphi = \sqrt{2}$$

Skizze:



Strategie 2008 W4b:

Struktogramm:

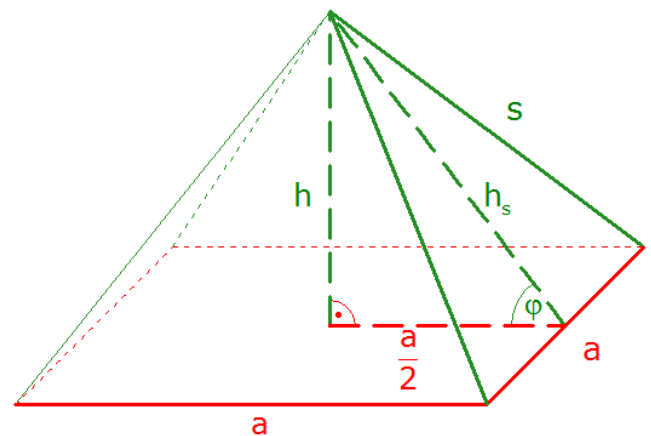


Lösung 2008 W4b:

1. Berechnung der Seitenkante s:

$$s = a$$

$$s = \frac{3}{2} a$$



Lösung 2008 W4b:

2. Berechnung der Höhe der Seitenfläche h_s :

$$h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2$$

Pythagoras im
rechtwinkligen
gelben Teildreieck

$$h_s^2 + \left(\frac{\frac{3}{2}e}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}e\right)^2$$

$$2 = \frac{2}{1}$$

$$h_s^2 + \left(\frac{\frac{3}{2}e}{\frac{2}{1}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}e\right)^2$$

$$: \frac{2}{1} \Rightarrow \cdot \frac{1}{2}$$

$$h_s^2 + \left(\frac{3}{2}e \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}e\right)^2$$

$$h_s^2 + \left(\frac{3}{4}e\right)^2 = \left(\frac{3}{2}e\right)^2$$

$$h_s^2 + \frac{3}{4}e \cdot \frac{3}{4}e = \frac{3}{2}e \cdot \frac{3}{2}e$$

$$h_s^2 + \frac{9}{16}e^2 = \frac{9}{4}e^2 \quad \left| - \frac{9}{16}e^2 \right.$$

$$h_s^2 = \frac{9}{4}e^2 - \frac{9}{16}e^2$$

$$h_s^2 = \frac{36}{16}e^2 - \frac{9}{16}e^2$$

$$h_s^2 = \frac{27}{16}e^2 \quad \left| \sqrt{} \right.$$

$$h_s = \sqrt{\frac{27}{16}e^2}$$

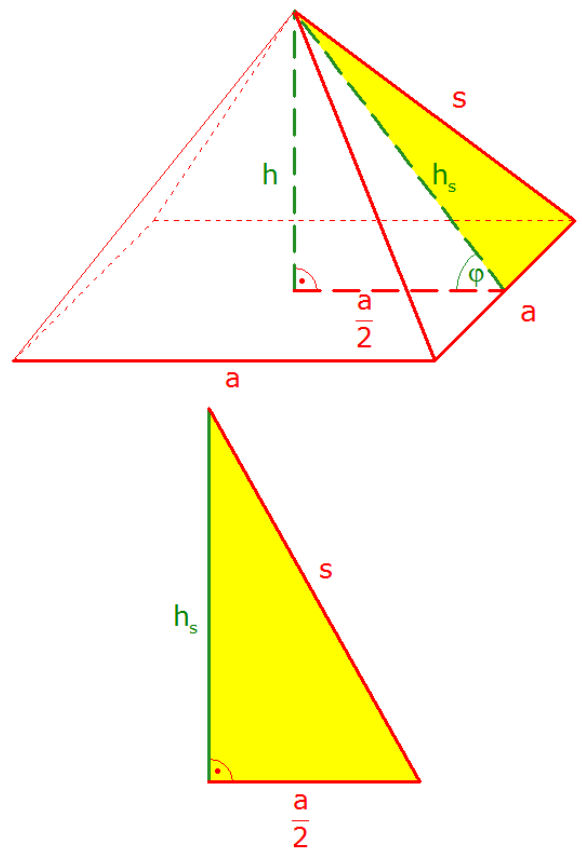
$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$h_s = \sqrt{\frac{27}{16}} \cdot \sqrt{e^2}$$

$$h_s = \sqrt{\frac{27}{16}} \cdot e$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$h_s = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{16}} \cdot e$$



Lösung 2008 W4b:

$$h_s = \frac{\sqrt{27}}{4} \cdot e$$

$$h_s = \frac{\sqrt{3 \cdot 9}}{4} \cdot e$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$h_s = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}}{4} \cdot e$$

$$h_s = \frac{\sqrt{3} \cdot 3}{4} \cdot e$$

$$h_s = \frac{3}{4} e \sqrt{3}$$

3. Berechnung der Höhe h der Pyramide:

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2$$

Pythagoras im
rechtwinkligen
grünen Dreieck

$$h^2 + \left(\frac{3}{4}e\right)^2 = \left(\frac{3}{4}e\sqrt{3}\right)^2$$

$$h^2 + \frac{3}{4}e \cdot \frac{3}{4}e = \frac{3}{4}e\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{3}$$

$$h^2 + \frac{9}{16}e^2 = \frac{3}{4}e\sqrt{3} \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{3}$$

$$h^2 + \frac{9}{16}e^2 = \frac{3}{4}e \cdot \frac{3}{4}e \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$h^2 + \frac{9}{16}e^2 = \frac{9}{16}e^2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$h^2 + \frac{9}{16}e^2 = \frac{9}{16}e^2 \cdot 3$$

$$h^2 + \frac{9}{16}e^2 = \frac{27}{16}e^2$$

$$\left| -\frac{9}{16}e^2 \right.$$

$$h^2 = \frac{18}{16}e^2$$

$$\left| \sqrt{} \right.$$

$$h = \sqrt{\frac{18}{16}e^2}$$

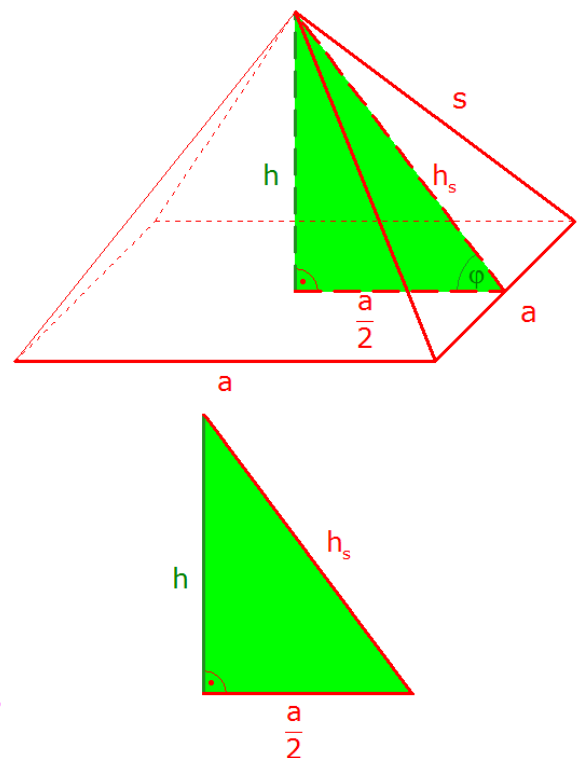
$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$h = \sqrt{\frac{18}{16}} \cdot \sqrt{e^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{18}{16}} \cdot e$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$h = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{16}} \cdot e$$



Lösung 2008 W4b:

$$h = \frac{\sqrt{18}}{4} \cdot e$$

$$h = \frac{\sqrt{2 \cdot 9}}{4} \cdot e$$

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$h = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9}}{4} \cdot e$$

$$h = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{4} \cdot e$$

$$h = \frac{3}{4} e \sqrt{2}$$

4. Berechnung des Volumens V der Pyramide:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

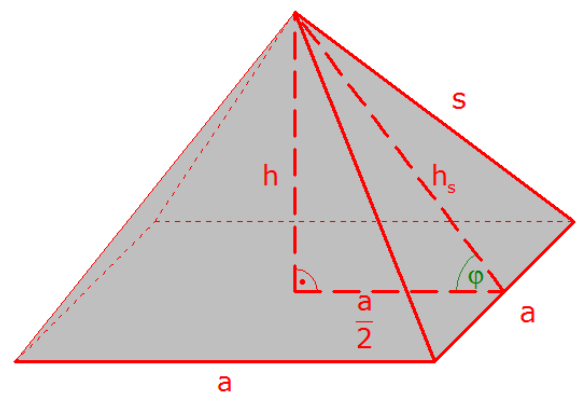
$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}e\right)^2 \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{2}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}e \cdot \frac{3}{2}e \cdot \frac{3}{4}e\sqrt{2}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot e \cdot e \cdot e \cdot \sqrt{2}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot e \cdot e \cdot e \cdot \sqrt{2} \quad \text{kürzen}$$

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{9}{16} e^3 \sqrt{2}$$



5. Berechnung des Tangenswertes des Winkels φ :

$$\tan \varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h}{\frac{a}{2}} \quad \text{Tangensfunktion im rechtwinkligen grünen Dreieck}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{3}{4}e\sqrt{2}}{\frac{3}{4}e}$$

$$\tan \varphi = \frac{\cancel{\frac{3}{4}}e\sqrt{2}}{\cancel{\frac{3}{4}}e} \quad \text{kürzen}$$

$$\tan \varphi = \sqrt{2}$$

