Wahlaufgaben

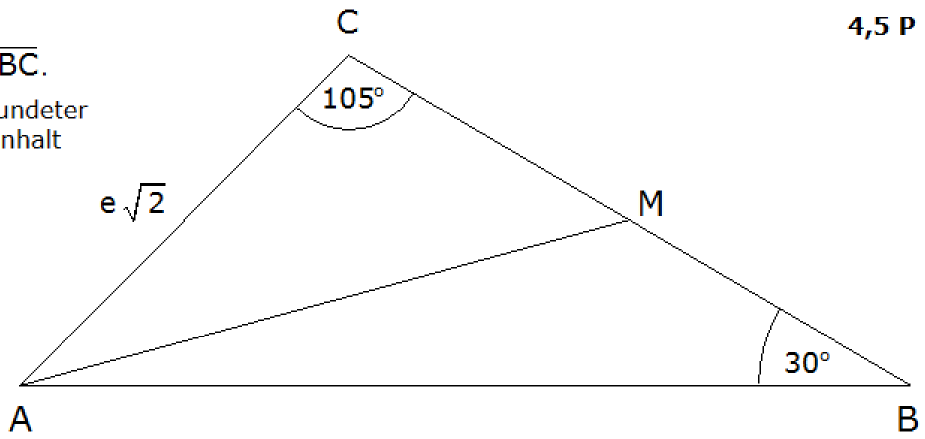
Aufgabe 2008 W1b:

4,5 P

Gegeben ist das Dreieck ABC.
Der Punkt M halbiert die Strecke $\overline{BC}$.

Weisen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte nach, dass für den Flächeninhalt des Dreiecks ABM gilt:

$$ABM = \frac{e^2}{4}\left(1 + \sqrt{3}\right)$$



Strategie 2008 W1b:

Gegeben:

Punkt M halbiert Strecke $\overline{BC}$.

$\overline{AC} = e\sqrt{2}$

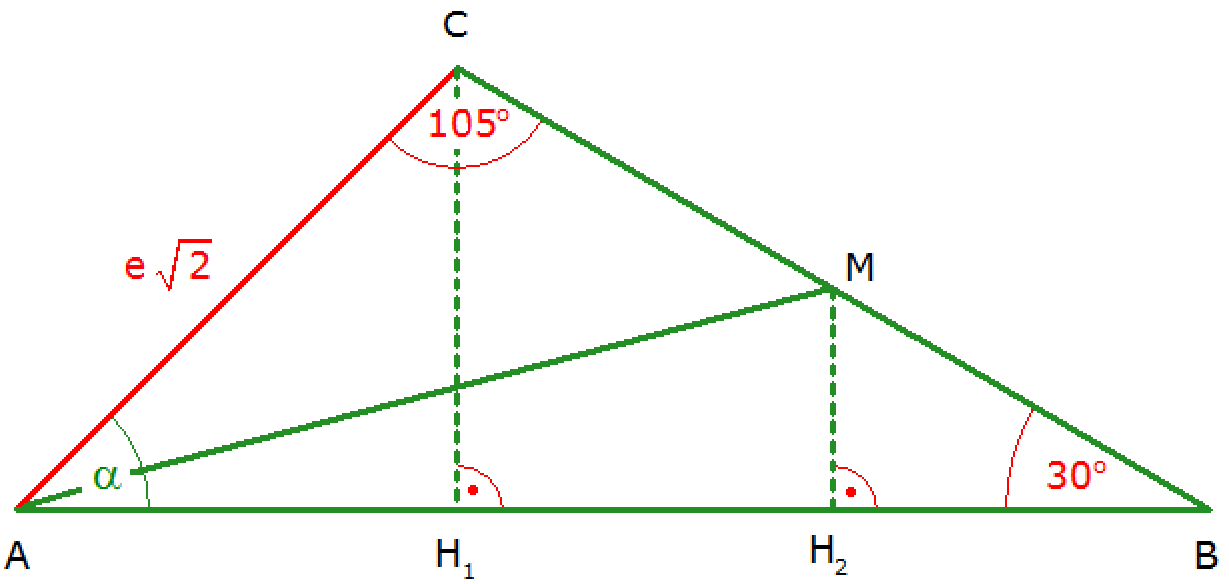
$\beta = 30^\circ$

$\gamma = 105^\circ$

Gesucht:

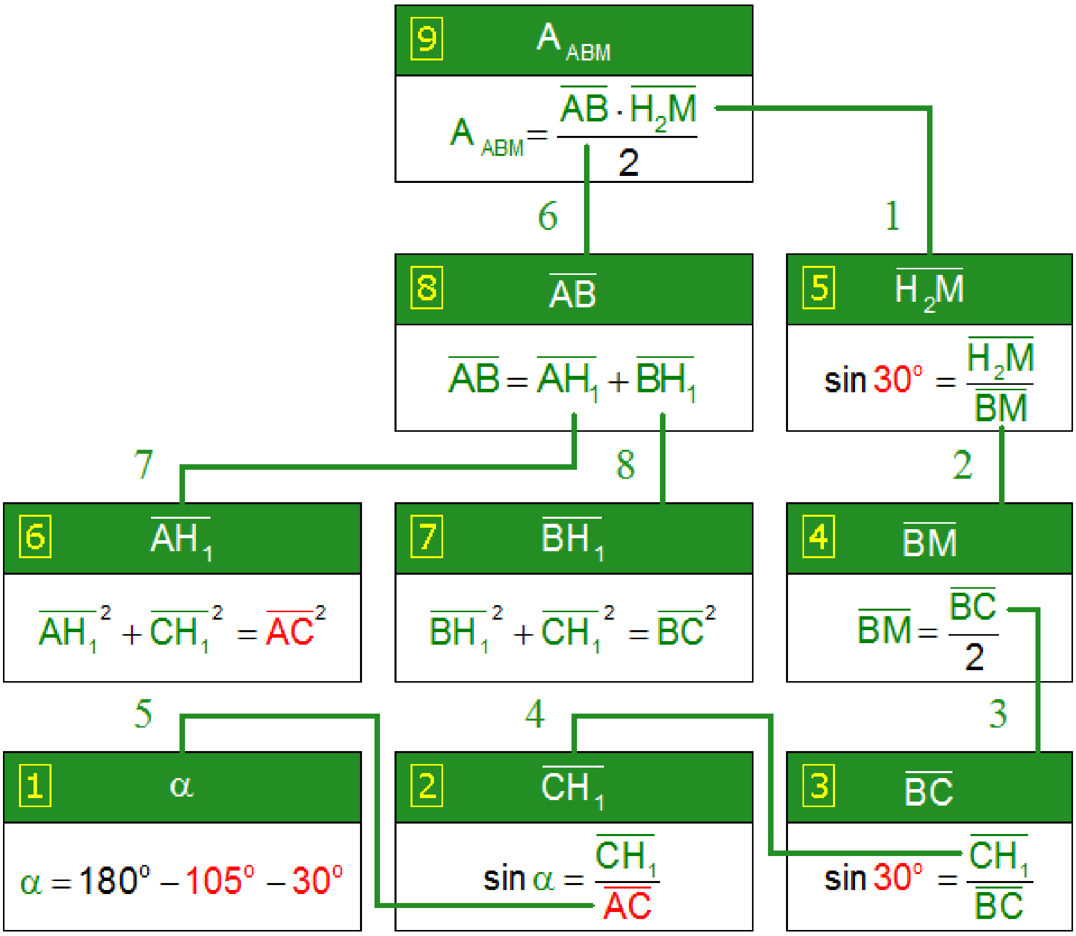
A_{ABM}

Skizze:



Strategie 2008 W1b:

Struktogramm:

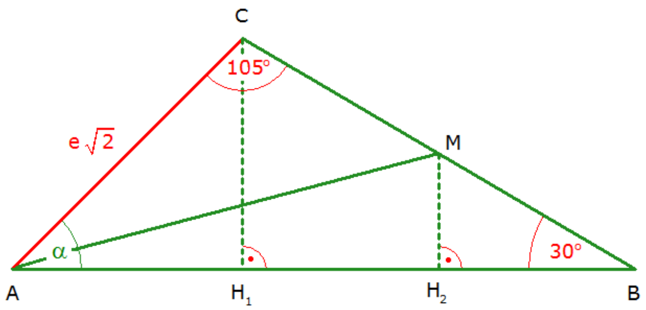


Lösung 2008 W1b:

1. Berechnung des Winkels α:

$\alpha = 180^\circ - 105^\circ - 30^\circ$ Winkelsumme im Dreieck ABC

$\underline{\alpha = 45^\circ}$



Lösung 2008 W1b:

2. Berechnung der Strecke $\overline{CH_1}$:

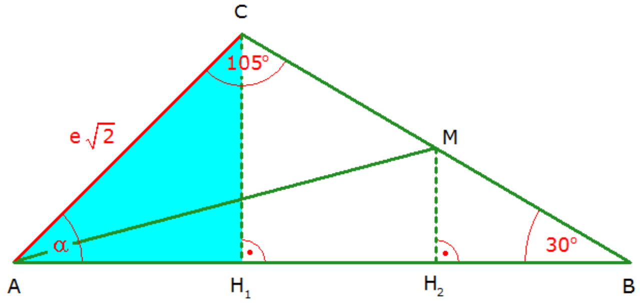
$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{CH_1}}{\overline{AC}}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck ACH_1

$$\sin 45^\circ = \frac{\overline{CH_1}}{e\sqrt{2}}$$

Seiten tauschen

$$\frac{\overline{CH_1}}{e\sqrt{2}} = \sin 45^\circ \qquad \Big| \cdot e\sqrt{2}$$



$$\overline{CH_1} = \sin 45^\circ \cdot e\sqrt{2} \qquad \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\overline{CH_1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot e\sqrt{2}$$

$$\overline{CH_1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{2} \cdot e \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

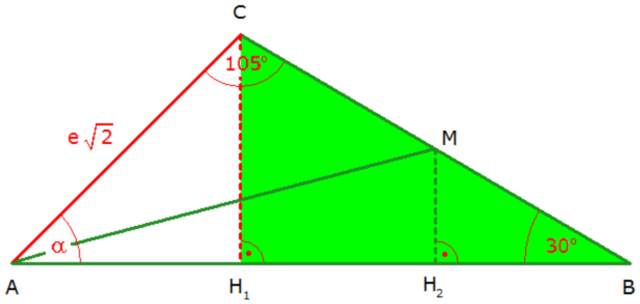
$$\overline{CH_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e \qquad \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\underline{\overline{CH_1} = e}$$

3. Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{CH_1}}{\overline{BC}}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen grünen Teildreieck



$$\sin 30^\circ = \frac{e}{\overline{BC}} \qquad \Big| \cdot \overline{BC}$$

$$\overline{BC} \cdot \sin 30^\circ = e \qquad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

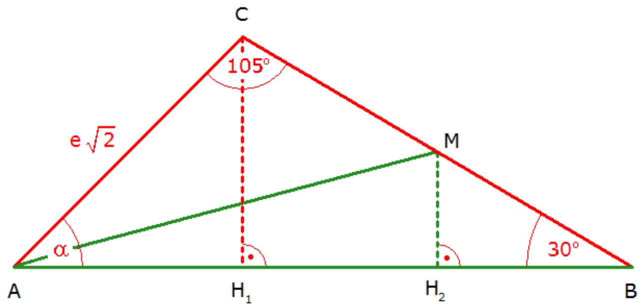
$$\overline{BC} \cdot \frac{1}{2} = e \qquad \Big| \cdot 2$$

$$\underline{\overline{BC} = 2e}$$

4. Berechnung der Strecke $\overline{BM}$:

$$\overline{BM} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

Punkt M halbiert die Strecke $\overline{BC}$



$$\overline{BM} = \frac{2e}{2}$$

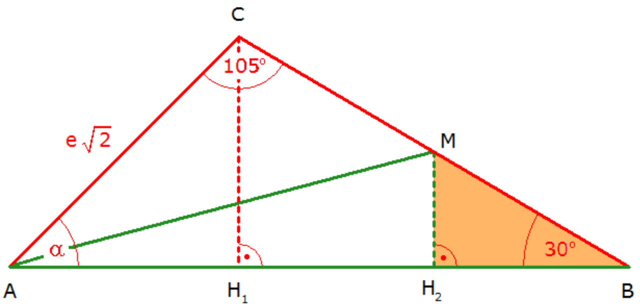
$$\underline{\overline{BM} = e}$$

Lösung 2008 W1b:

5. Berechnung der Strecke $\overline{H_2M}$:

$$\sin 30^0 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{H_2M}}{\overline{BM}}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen orangefarbenen Teildreieck



$$\sin 30^0 = \frac{\overline{H_2M}}{e}$$ Seiten tauschen

$$\frac{\overline{H_2M}}{e} = \sin 30^0 \quad \Big| \cdot e$$

$$\overline{H_2M} = \sin 30^0 \cdot e \qquad \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

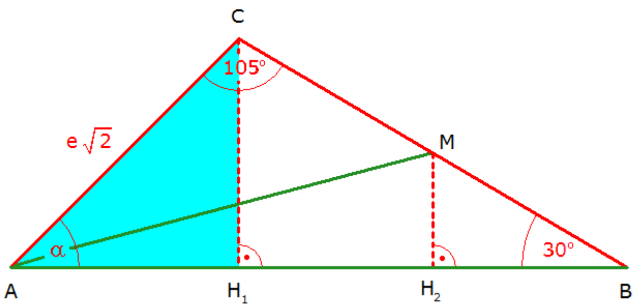
$$\overline{H_2M} = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$\overline{H_2M} = \frac{e}{2}$$

6. Berechnung der Strecke $\overline{AH_1}$:

$$\overline{AH_1}^2 + \overline{CH_1}^2 = \overline{AC}^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck



$$\overline{AH_1}^2 + e^2 = \left(e\sqrt{2}\right)^2$$

$$\overline{AH_1}^2 + e^2 = e\sqrt{2} \cdot e\sqrt{2}$$

$$\overline{AH_1}^2 + e^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e \cdot e$$

$$\overline{AH_1}^2 + e^2 = 2\,e^2 \quad \Big| -e^2$$

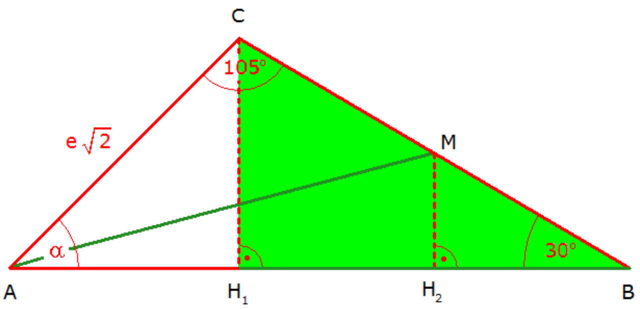
$$\overline{AH_1}^2 = e^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$\overline{AH_1} = e$$

7. Berechnung der Strecke $\overline{H_1B}$:

$$\overline{H_1B}^2 + \overline{CH_1}^2 = \overline{BC}^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen grünen Teildreieck



$$\overline{H_1B}^2 + e^2 = (2\,e)^2$$

$$\overline{H_1B}^2 + e^2 = 2\,e \cdot 2\,e$$

$$\overline{H_1B}^2 + e^2 = 4\,e^2 \quad \Big| -e^2$$

$$\overline{H_1B}^2 = 3\,e^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

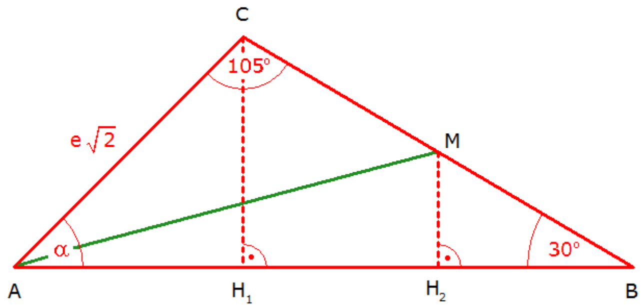
$$\overline{H_1B} = \sqrt{3\,e^2} \qquad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\overline{H_1B} = \sqrt{3}\,\sqrt{e^2}$$

$$\overline{H_1B} = \sqrt{3}\,e$$

Lösung 2008 W1b:

8. Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:



$$\overline{AB} = \overline{AH_1} + \overline{BH_1}$$

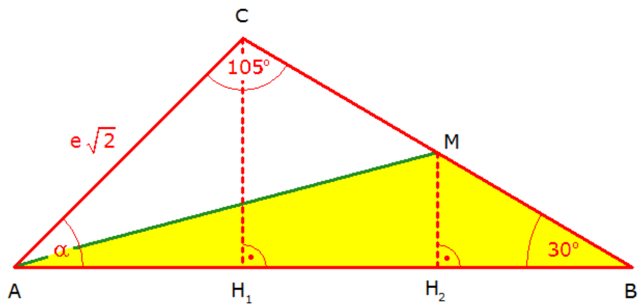
$$\overline{AB} = e + \sqrt{3}\,e$$

$$\overline{AB} = 1 \cdot e + \sqrt{3}\,e$$

gemeinsamen Faktor ausklammern

$$\underline{\overline{AB} = e\left(1 + \sqrt{3}\right)}$$

9. Berechnung der Dreiecksfläche A_{ABM}:



$$A_{ABM} = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2}$$

Flächenformel Allgemeines Dreieck

$$A_{ABM} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{H_2M}}{2}$$

$$A_{ABM} = \frac{e\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot \frac{e}{2}}{2}$$

$$A_{ABM} = \frac{e\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot \frac{e}{2}}{\frac{2}{1}}$$

$$A_{ABM} = e\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_{ABM} = \frac{e}{1}\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$A_{ABM} = \frac{e}{1} \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$\underline{\underline{A_{ABM} = \frac{e^2}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)}}$$