

Wahlaufgaben

Aufgabe 2007 W3b:

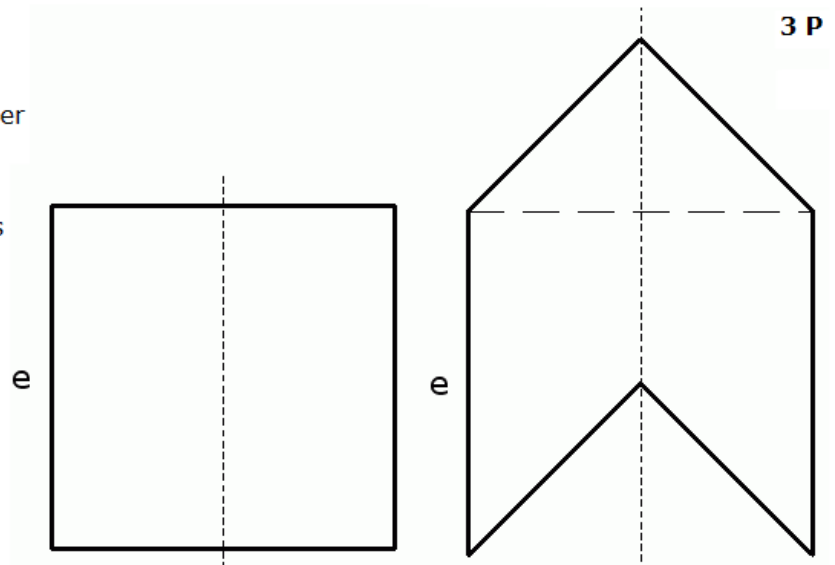
Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Quadrat mit der Seitenlänge e .

Aus dem Zylinder wird ein Kegel mit halber Zylinderhöhe herausgearbeitet und oben aufgesetzt.

Weisen Sie nach, dass die Oberfläche des neu entstandenen Körpers um

$$\frac{\pi e^2}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

größer ist als die des Zylinders.



Strategie 2007 W3b:

Gegeben:

$$r_{\text{Zylinder}} = \frac{e}{2}$$

$$h_{\text{Zylinder}} = e$$

$$r_{\text{Körper}} = \frac{e}{2}$$

$$h_{\text{Körper}} = e$$

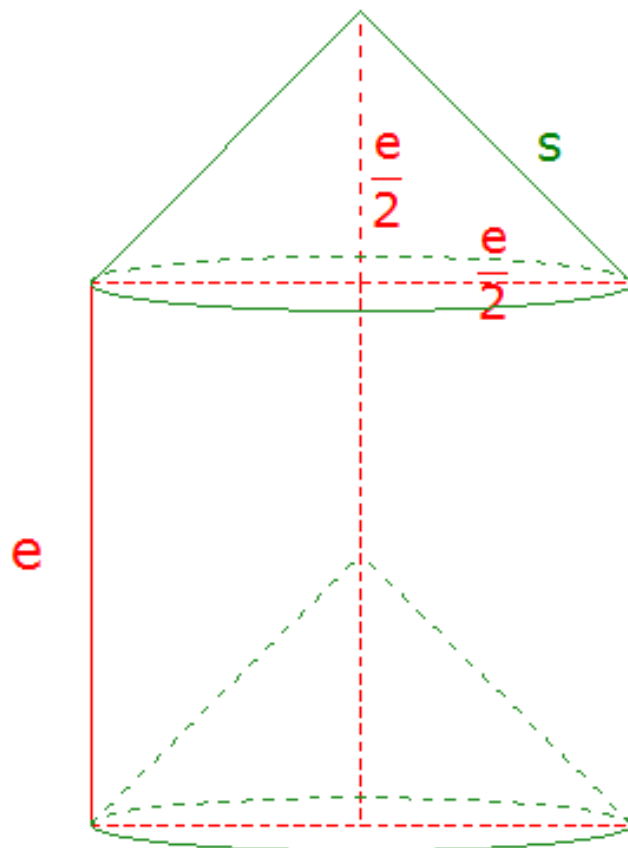
$$h_{\text{Kegel}} = \frac{e}{2}$$

$$r_{\text{Kegel}} = \frac{e}{2}$$

Gesucht:

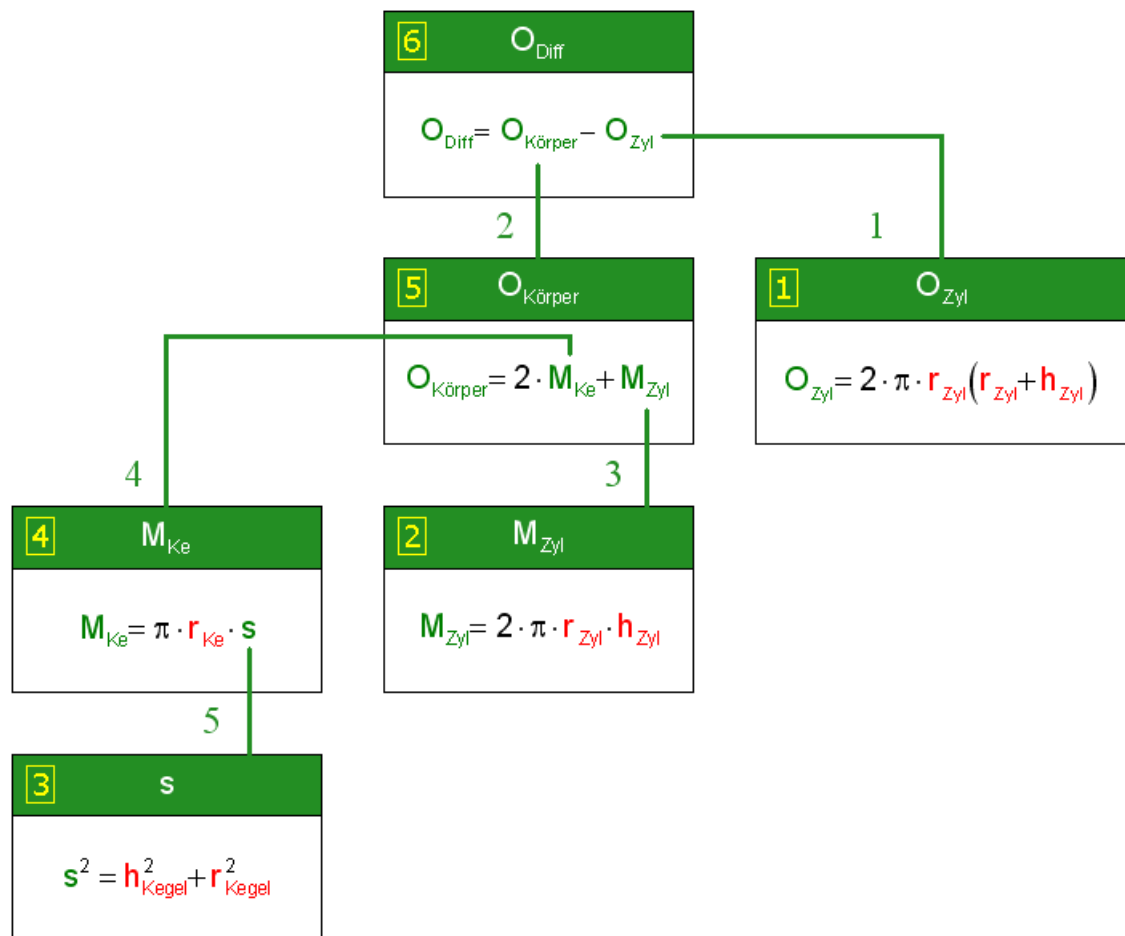
$$O_{\text{Differenz}} = \frac{\pi e^2}{2}(\sqrt{2} - 1)$$

Skizze:



Strategie 2007 W3b:

Struktogramm:



Lösung 2007 W3b:

1. Berechnung der Zylinderoberfläche O_{Zylinder} :

$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Zyl}} (r_{\text{Zyl}} + h_{\text{Zyl}})$ Formel
Zylinderoberfläche

$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + e \right)$

$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + e \right)$ erweitern

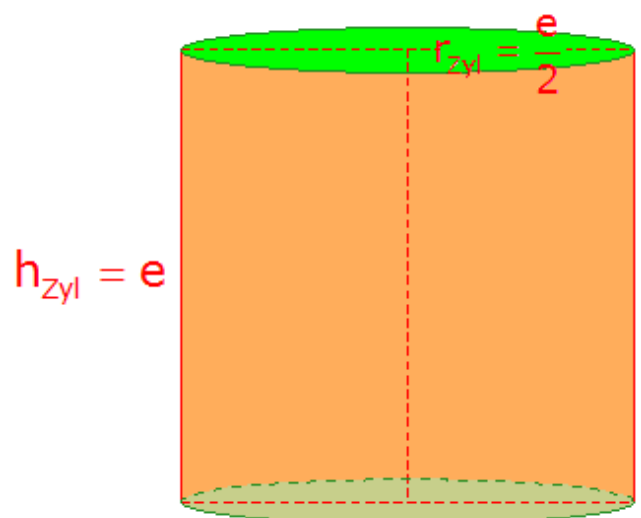
$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + \frac{2e}{2} \right)$

$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + \frac{2e}{2} \right)$

$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \left(\frac{e}{2} + \frac{2e}{2} \right)$ Brüche addieren

$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{3e}{2}$

$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{3e}{2}$



Lösung 2007 W3b:

$$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{3e}{2} \quad \text{Brüche multiplizieren}$$

$$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{3e^2}{4}$$

$$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{3e^2}{4}$$

$$O_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{3e^2}{4} \quad \text{kürzen}$$

$$O_{\text{Zyl}} = \pi \cdot \frac{3e^2}{2}$$

$$O_{\text{Zyl}} = \pi \cdot \frac{3e^2}{2}$$

$$O_{\text{Zyl}} = \frac{3}{2} e^2 \pi$$

2. Berechnung des Zylindermantels M_{Zylinder} :

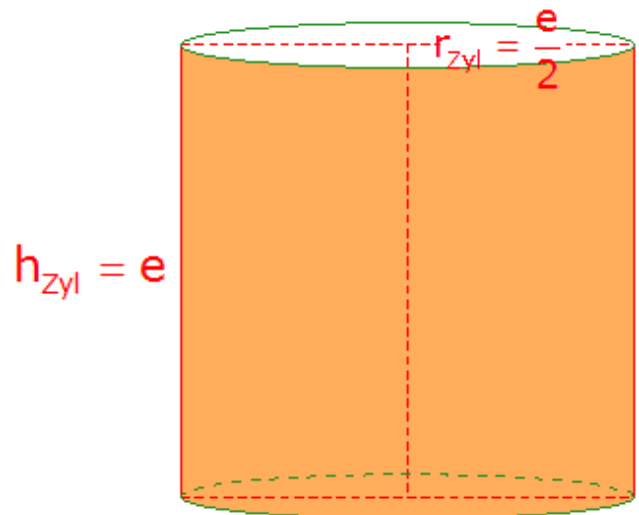
$$M_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Zyl}} \cdot h_{\text{Zyl}} \quad \text{Formel Zylindermantel}$$

$$M_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \cdot e$$

$$M_{\text{Zyl}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{e}{2} \cdot e \quad \text{kürzen}$$

$$M_{\text{Zyl}} = \pi \cdot e \cdot e$$

$$M_{\text{Zyl}} = e^2 \pi$$



3. Berechnung der Mantellinie s des Kegels:

$$s^2 = h_{\text{Ke}}^2 + r_{\text{Ke}}^2 \quad \text{Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck}$$

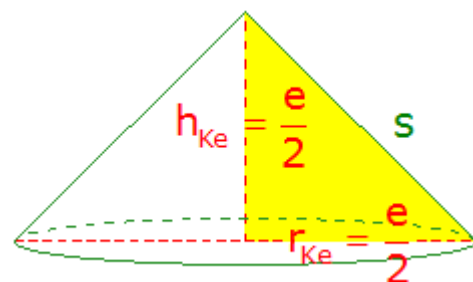
$$s^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$s^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad \text{Addition}$$

$$s^2 = 2 \cdot \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad \text{Potenz in Produkt umwandeln}$$

$$s^2 = 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{e}{2} \quad \text{Brüche multiplizieren}$$

$$s^2 = 2 \cdot \frac{e^2}{4}$$



Lösung 2007 W3b:

$$s^2 = 2 \cdot \frac{e^2}{4}$$

$$s^2 = 2 \cdot \frac{e^2}{4}$$

Bruch kürzen

$$s^2 = \frac{e^2}{2}$$

$\sqrt{\quad}$

$$s = \sqrt{\frac{e^2}{2}}$$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$s = \frac{\sqrt{e^2}}{\sqrt{2}}$$

$$s = \frac{e}{\sqrt{2}}$$

$$s = \frac{e \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

Nenner rational machen

$$s = \frac{e \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$s = \frac{1}{2} e \sqrt{2}$$

4. Berechnung des Kegelmantels M_{Kegel} :

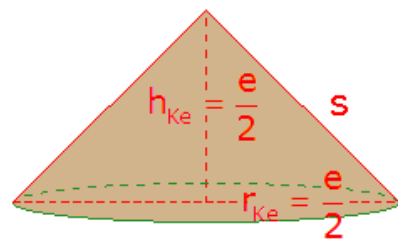
$$M_{\text{Ke}} = \pi \cdot r_{\text{Ke}} \cdot s_{\text{Ke}}$$

Formel Kegelmantel

$$M_{\text{Ke}} = \pi \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{1}{2} e \sqrt{2}$$

$$M_{\text{Ke}} = \pi \cdot \frac{e^2}{4} \sqrt{2}$$

$$M_{\text{Ke}} = \frac{1}{4} e^2 \sqrt{2} \pi$$



Lösung 2007 W3b:

5. Berechnung der Oberfläche $O_{\text{Körper}}$:

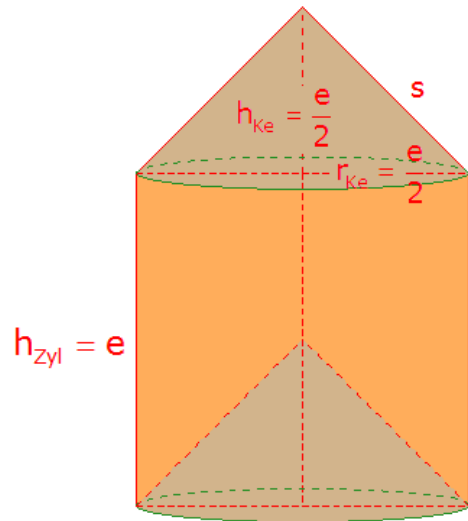
$$O_{\text{Körper}} = 2 \cdot M_{\text{Ke}} + M_{\text{Zyl}}$$

$$O_{\text{Körper}} = 2 \cdot \frac{1}{4} e^2 \sqrt{2} \pi + e^2 \pi$$

$$O_{\text{Körper}} = 2 \cdot \frac{1}{4} e^2 \sqrt{2} \pi + e^2 \pi \quad \text{kürzen}$$

$$O_{\text{Körper}} = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{2} \pi + e^2 \pi$$

$$O_{\text{Körper}} = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{2} \pi + e^2 \pi$$



6. Berechnung der Differenz der Oberflächen $O_{\text{Differenz}}$:

$$O_{\text{Differenz}} = O_{\text{Körper}} - O_{\text{Zylinder}}$$

$$O_{\text{Differenz}} = \frac{1}{2} \cdot e^2 \sqrt{2} \cdot \pi + e^2 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot \pi$$

$$O_{\text{Differenz}} = \frac{1}{2} \cdot e^2 \sqrt{2} \cdot \pi + e^2 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot \pi \quad \text{erweitern}$$

$$O_{\text{Differenz}} = \frac{1}{2} \cdot e^2 \sqrt{2} \cdot \pi + \frac{2}{2} \cdot e^2 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot \pi$$

$$O_{\text{Differenz}} = \frac{1}{2} \cdot e^2 \sqrt{2} \cdot \pi + \frac{2}{2} \cdot e^2 \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot \pi \quad \text{subtrahieren}$$

$$O_{\text{Differenz}} = \frac{1}{2} \cdot e^2 \sqrt{2} \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot \pi$$

$$O_{\text{Differenz}} = \frac{1}{2} \cdot e^2 \sqrt{2} \cdot \pi - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot \pi \quad \text{gleiche Faktoren ausklammern}$$

$$O_{\text{Differenz}} = \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot \pi \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

$$O_{\text{Differenz}} = \frac{\pi e^2}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

