

Wahlaufgaben

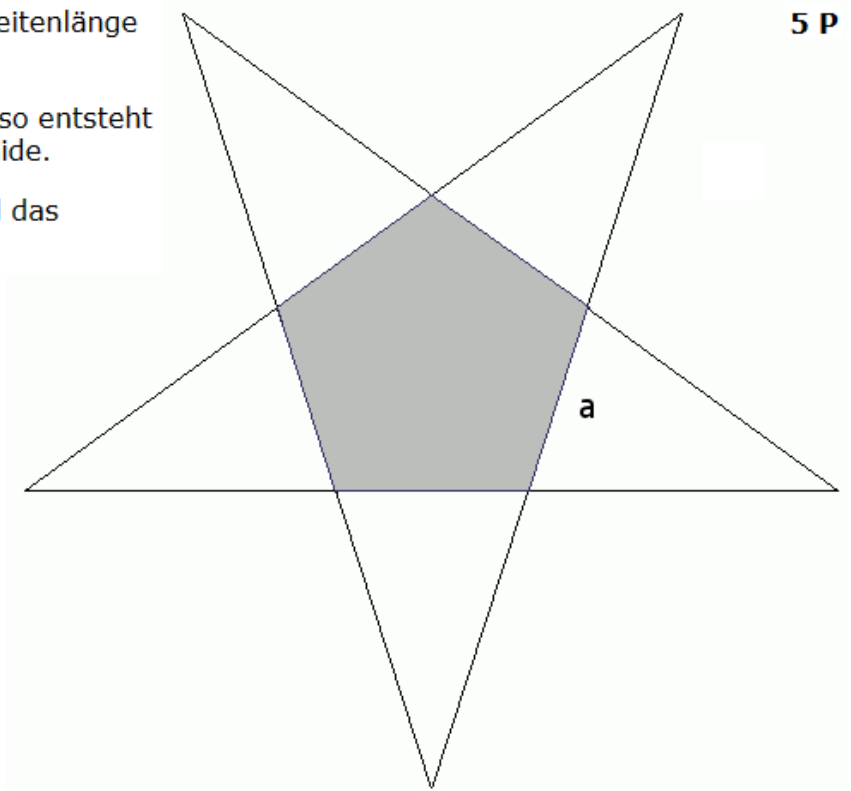
Aufgabe 2007 W3a:

Ein regelmäßiges Fünfeck hat die Seitenlänge $a = 3,6 \text{ cm}$.

Verlängert man alle Fünfeckseiten, so entsteht das Netz einer regelmäßigen Pyramide.

Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen der Pyramide.

5 P



Strategie 2007 W3a:

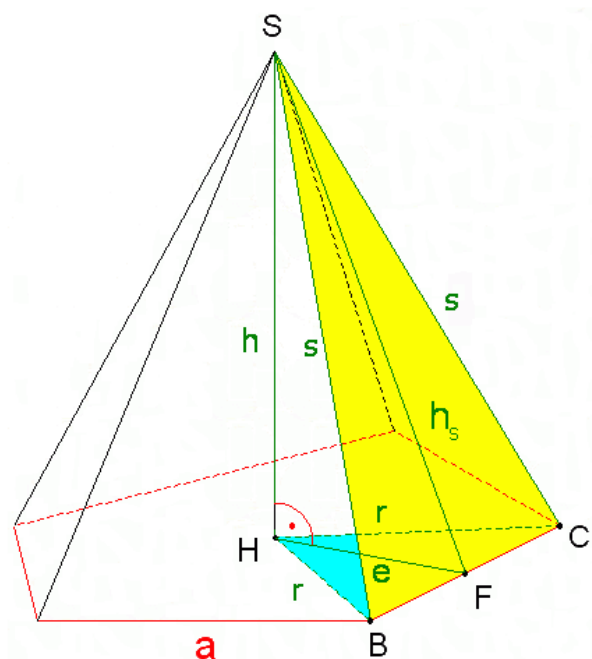
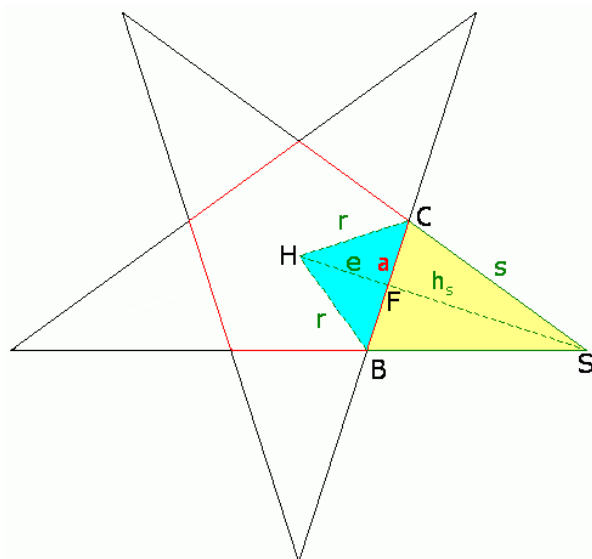
Gegeben:

regelmäßige fünfseitige
Pyramide
 $a = 3,6 \text{ cm}$

Gesucht:

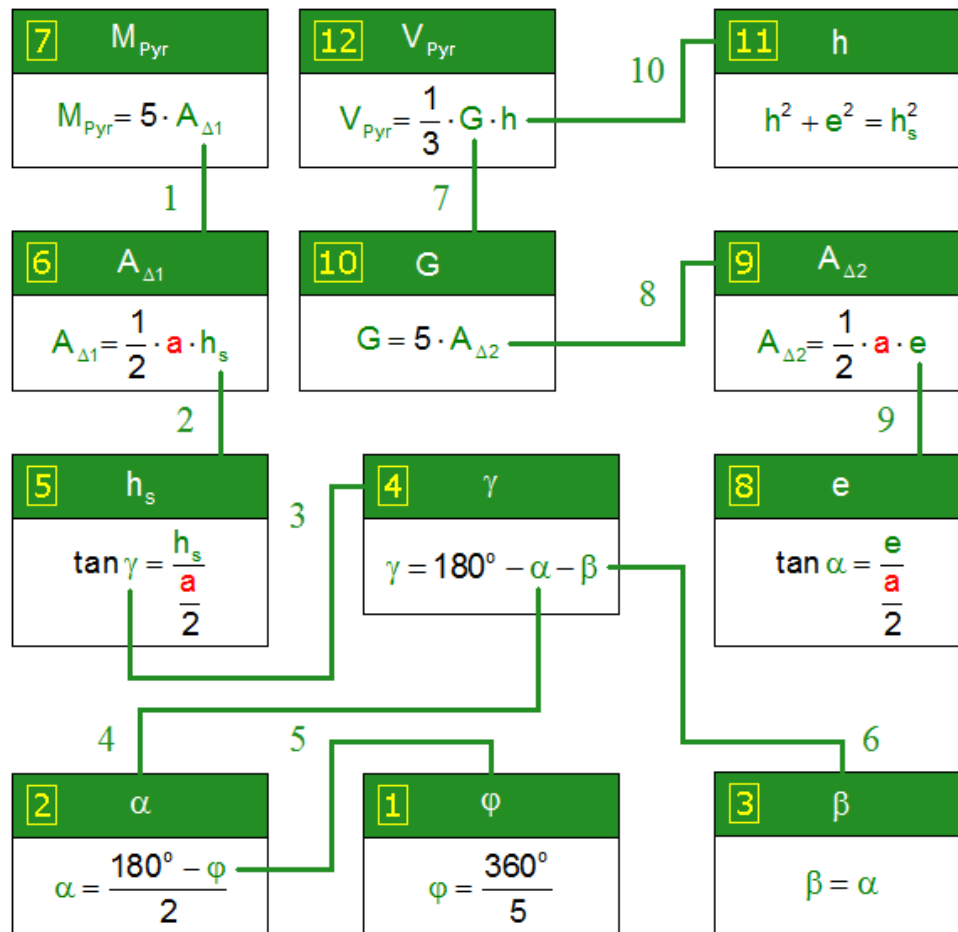
M_{Pyramide}
 V_{Pyramide}

Skizze:



Strategie 2007 W3a:

Struktogramm:

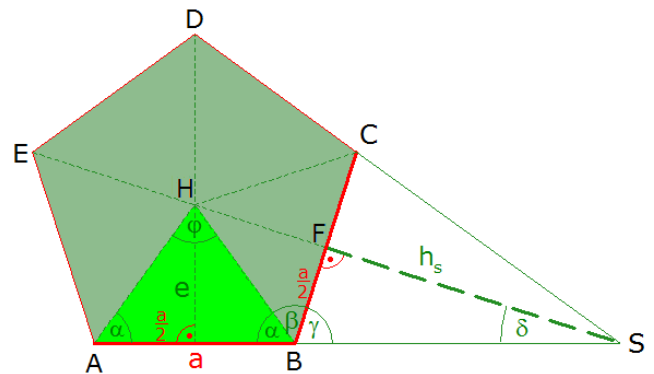


Lösung 2007 W3a:

1. Berechnung des Winkels φ :

$$\varphi = \frac{360^\circ}{5} \quad \text{siehe hellgrünes Teildreieck}$$

$$\varphi = 72^\circ$$



2. Berechnung des Winkels α :

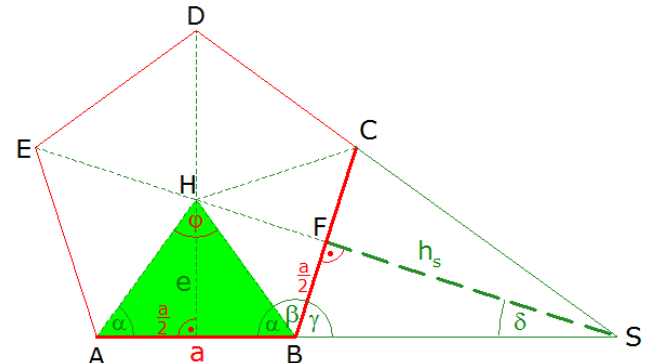
$$\alpha = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$$

hellgrünes Teildreieck ABH ist gleichschenkelig, deshalb sind die Basiswinkel gleich groß

$$\alpha = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2}$$

$$\alpha = \frac{108^\circ}{2}$$

$$\alpha = 54^\circ$$

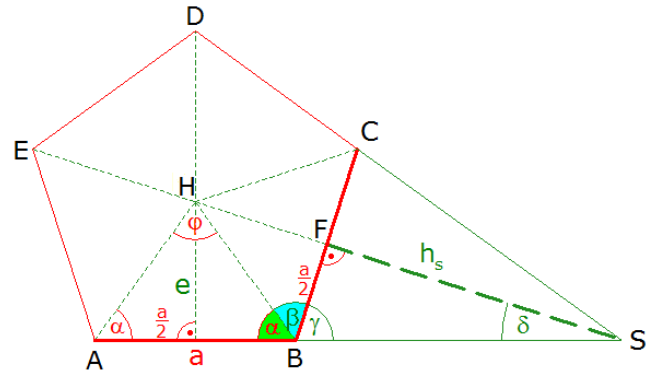


Lösung 2007 W3a:

3. Berechnung des Winkels β :

$\beta = \alpha$ β ist Basiswinkel im Teildreieck BCH

$$\underline{\beta = 54^\circ}$$

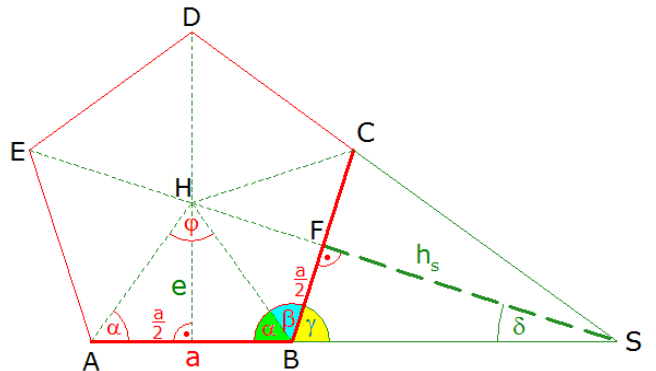


4. Berechnung des Winkels γ :

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - 54^\circ - 54^\circ$$

$$\underline{\gamma = 72^\circ}$$



5. Berechnung der Höhe der Seitenfläche h_s :

$$\tan \gamma = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h_s}{\frac{a}{2}}$$

Tangensfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck

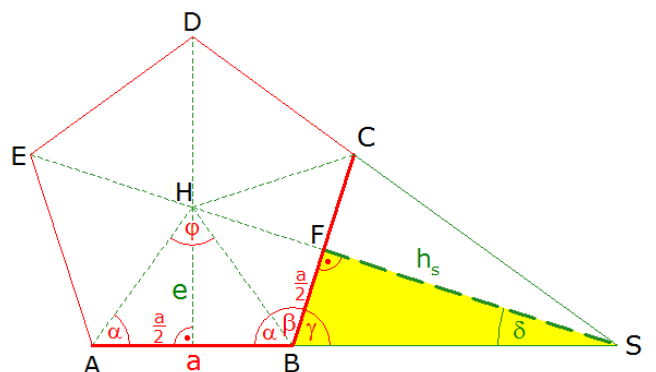
$$\tan 72^\circ = \frac{h_s}{1,8}$$

$$3,0777 = \frac{h_s}{1,8}$$

Seiten tauschen

$$\frac{h_s}{1,8} = 3,0777 \quad | \cdot 1,8$$

$$\underline{h_s = 5,54 \text{ cm}}$$



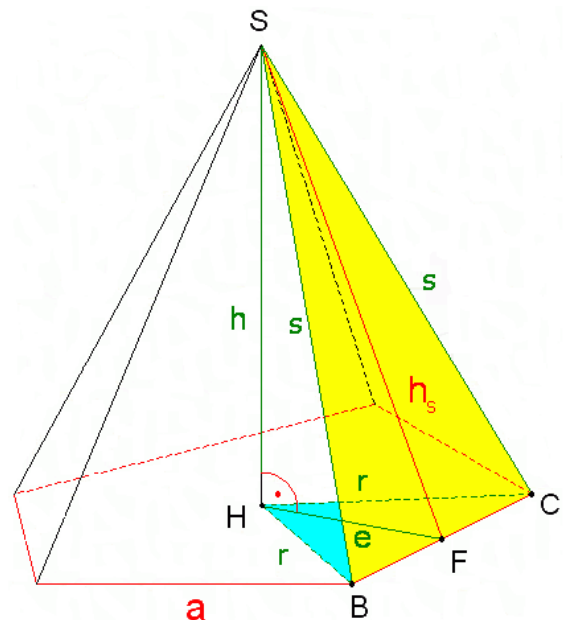
6. Berechnung der Seitenfläche $A_{\Delta 1}$:

$$A_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s$$

siehe gelbes Dreieck

$$A_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 5,54$$

$$\underline{A_{\Delta 1} = 9,972 \text{ cm}^2}$$



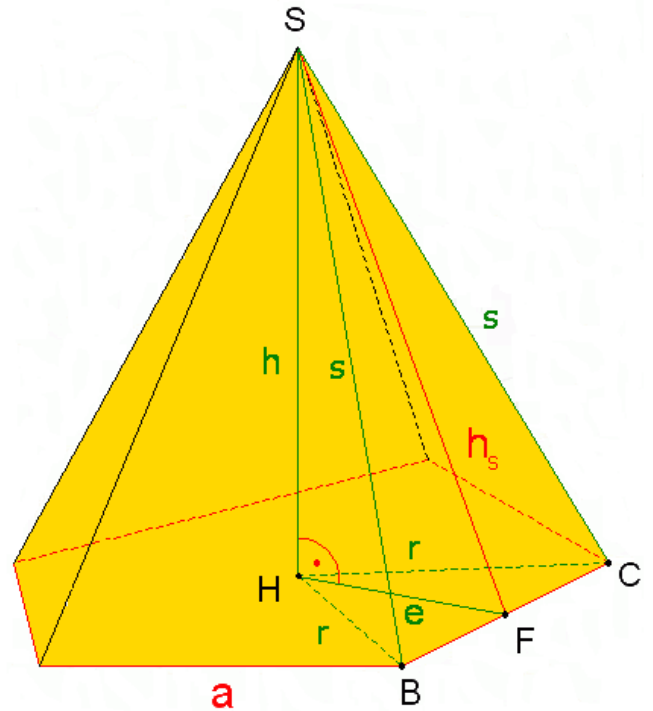
Lösung 2007 W3a:

7. Berechnung des Mantels M_{pyr} der Pyramide:

$$M_{\text{pyr}} = 5 \cdot A_{\Delta 1}$$

$$M_{\text{pyr}} = 5 \cdot 9,972$$

$$M_{\text{pyr}} = 49,86 \text{ cm}^2$$



8. Berechnung der Strecke e:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{e}{\frac{a}{2}}$$

Tangensfunktion im rechtwinkligen grünen Teildreieck

$$\tan 54^\circ = \frac{e}{1,8}$$

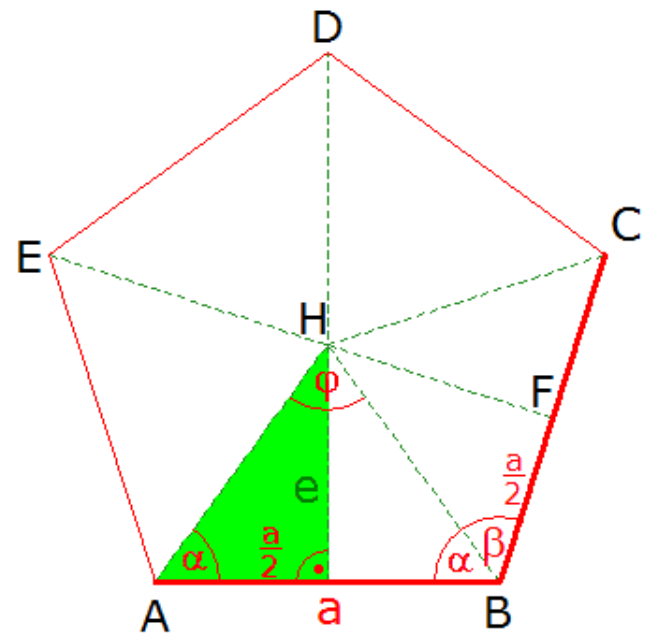
$$1,3764 = \frac{e}{1,8}$$

$$\frac{e}{1,8} = 1,3764$$

$$e = 2,48 \text{ cm}$$

Seiten tauschen

$$| \cdot 1,8$$



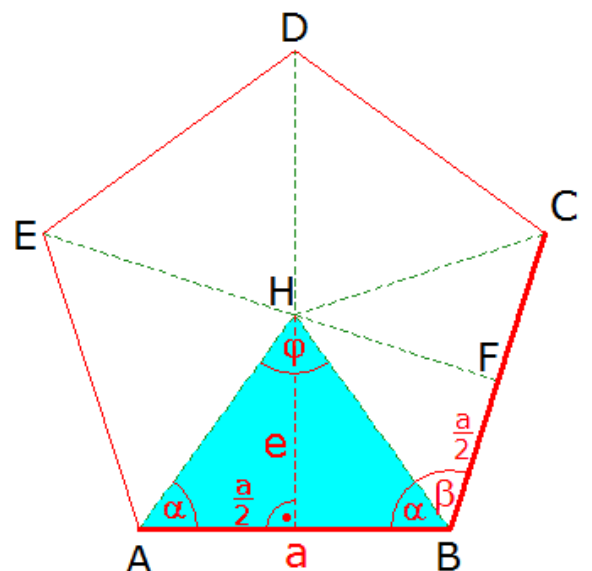
9. Berechnung der Dreiecksfläche $A_{\Delta 2}$:

$$A_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot e$$

Formel Dreiecksfläche

$$A_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot 3,6 \cdot 2,48$$

$$A_{\Delta 2} = 4,464 \text{ cm}^2$$



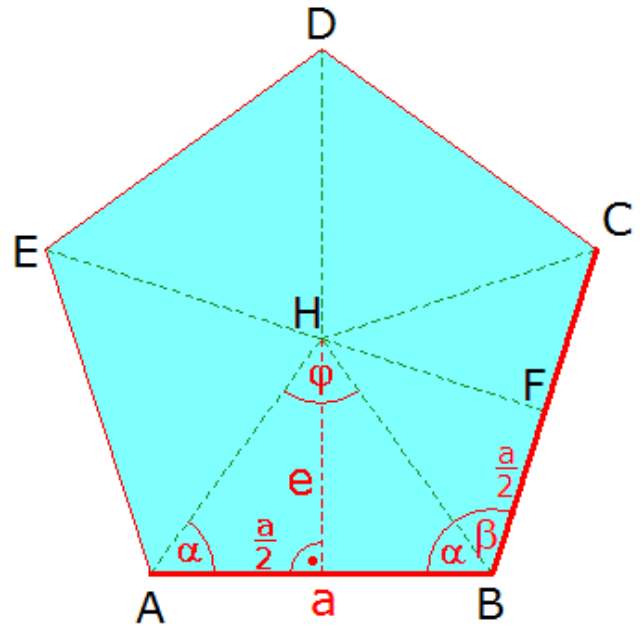
Lösung 2007 W3a:

10. Berechnung der Grundfläche G:

$$G = 5 \cdot A_{\Delta 2}$$

$$G = 5 \cdot 4,464$$

$$G = 22,32 \text{ cm}^2$$



11. Berechnung der Pyramidenhöhe h:

$$h^2 + e^2 = h_s^2$$

Pythagoras im
rechtwinkligen
orangefarbenen
Teildreieck

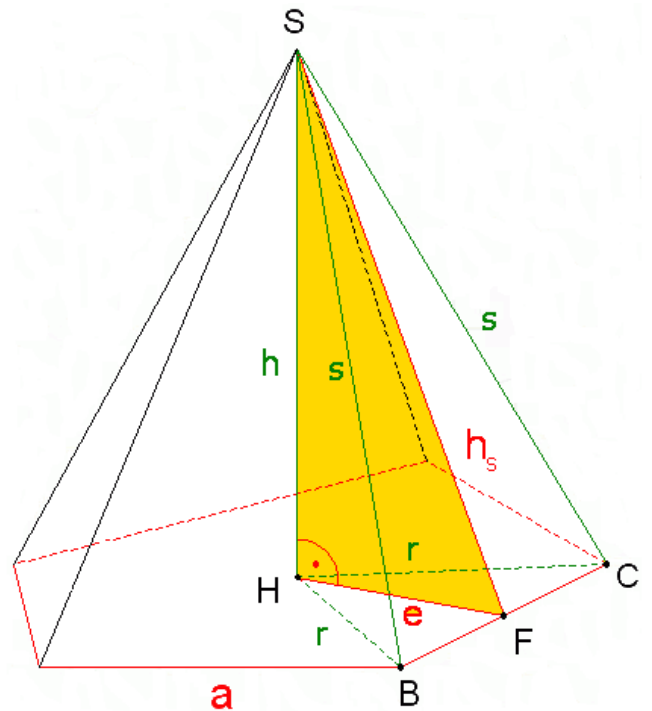
$$h^2 + 2,48^2 = 5,54^2$$

$$h^2 + 6,1504 = 30,6916 \quad | - 6,1504$$

$$h^2 = 24,5412$$

$\sqrt{\quad}$

$$h = 4,95 \text{ cm}$$



12. Berechnung des Pyramidenvolumens V:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 22,32 \cdot 4,95$$

$$V = 36,83 \text{ cm}^3$$

