Wahlaufgaben

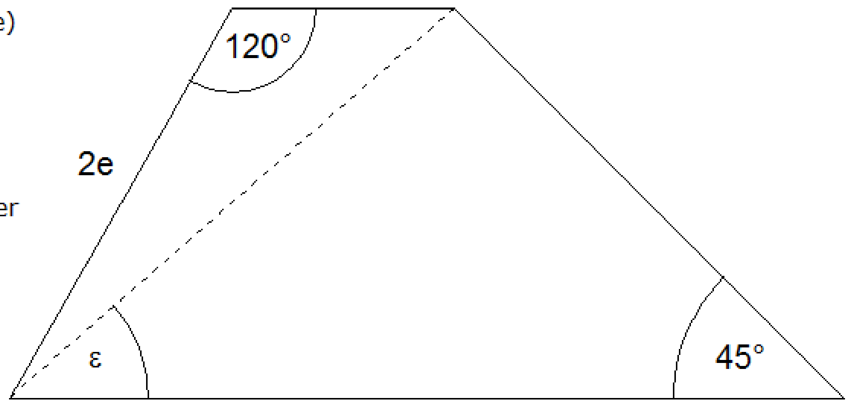
Aufgabe 2002 W1b: 3,5

Der Umfang des Trapezes (siehe Skizze) lässt sich mit der Formel

$$u = e\left(9 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$$

berechnen.
Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass gilt:

$$\tan\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Strategie 2002 W1b:

Gegeben:

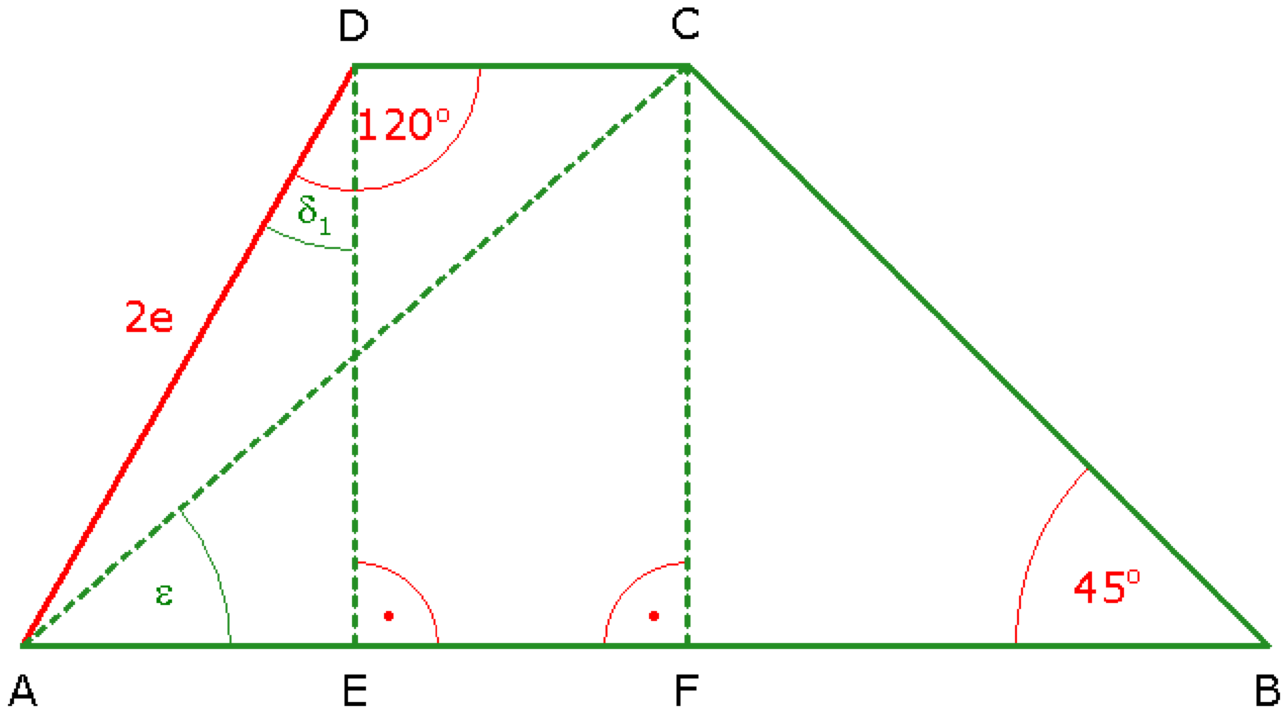
$$u = e\left(9 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$$

$$\overline{AD} = 2e$$

Gesucht:

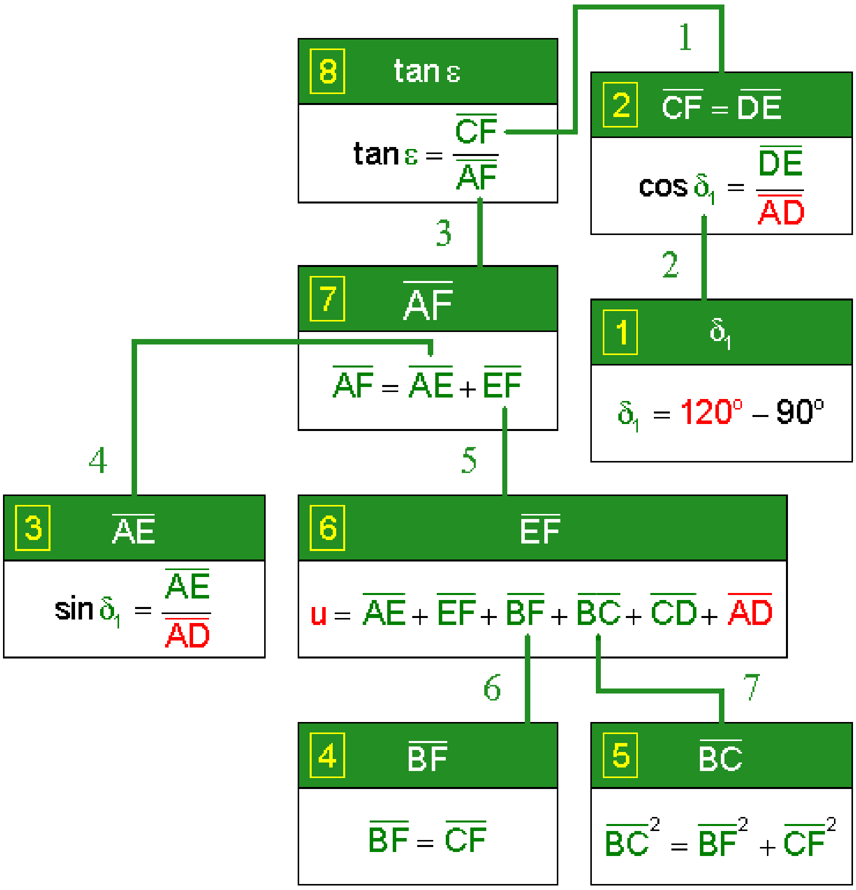
$$\tan\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Skizze:



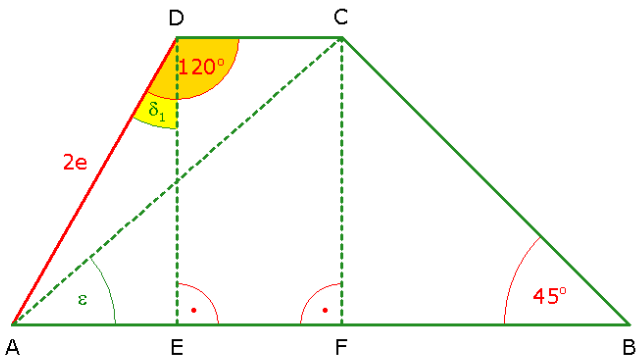
Strategie 2002 W1b:

Struktogramm:



Lösung 2002 W1b:

1. Berechnung des Winkels δ_1:



$\delta_1 = 120° - 90°$

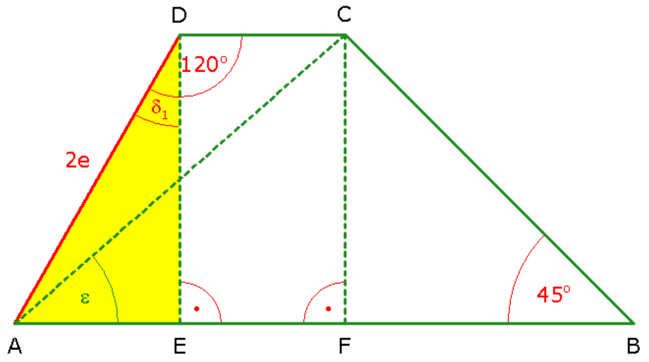
$\underline{\delta_1 = 30°}$

Lösung 2002 W1b:

2. Berechnung der Strecke $\overline{CF} = \overline{DE}$:

$$\cos\delta_1 = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$$ Kosinusfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck AED

$$\cos 30° = \frac{\overline{DE}}{2e}$$ $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$



$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\overline{DE}}{2e}$$ Seiten tauschen

$$\frac{\overline{DE}}{2e} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \Big| \cdot 2e$$

$$\overline{DE} = 2e \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\overline{DE} = \cancel{2}e \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{3}$$ Kürzen

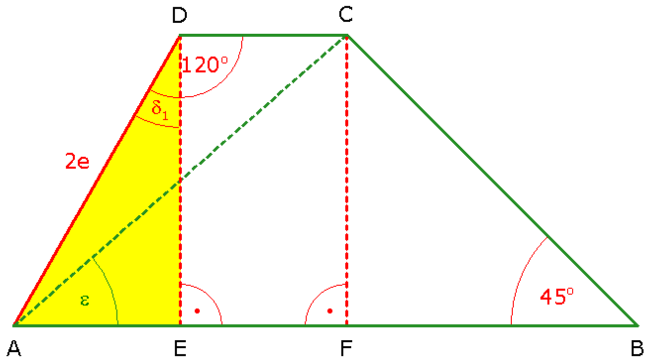
$$\underline{\overline{DE} = e\sqrt{3}}$$

$$\underline{\overline{CF} = e\sqrt{3}}$$

3. Berechnung der Strecke $\overline{AE}$:

$$\sin\delta_1 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}$$ Sinusfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck AED

$$\sin 30° = \frac{\overline{AE}}{2e}$$ $\sin 30° = \frac{1}{2}$



$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{AE}}{2e}$$ Seiten tauschen

$$\frac{\overline{AE}}{2e} = \frac{1}{2} \quad \Big| \cdot 2e$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot 2e$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}e$$ Kürzen

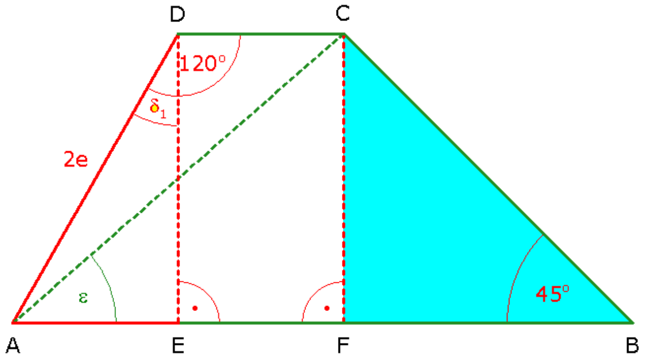
$$\underline{\overline{AE} = e}$$

Lösung 2002 W1b:

4. Berechnung der Strecke $\overline{BF}$:

$\overline{BF} = \overline{CF}$ Teildreieck BCF ist gleichschenklig, da die Basiswinkel gleich groß sind!

$\overline{BF} = e\sqrt{3}$



5. Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

Pythagoras im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck BCF

$\overline{BC}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{CF}^2$

$\overline{BC}^2 = \left(e\sqrt{3}\right)^2 + \left(e\sqrt{3}\right)^2$

$\overline{BC}^2 = 3e^2 + 3e^2$

$\overline{BC}^2 = 6e^2 \quad \left|\sqrt{}\right.$

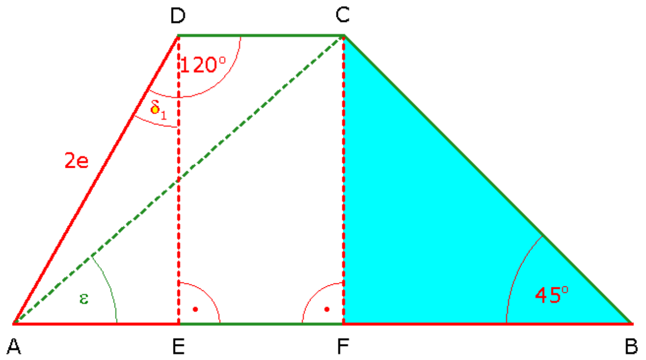
$\overline{BC} = \sqrt{6e^2}$

Wurzelgesetz: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\overline{BC} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{e^2}$

$\overline{BC} = \sqrt{6} \cdot e$ Plätze tauschen

$\overline{BC} = e\sqrt{6}$



6. Berechnung der Strecke $\overline{EF} = \overline{CD}$:

$u = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{BF} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$

$e\left(9 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = e + \overline{EF} + e\sqrt{3} + e\sqrt{6} + \overline{EF} + 2e$

$e\left(9 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = e + \overline{EF} + e\sqrt{3} + e\sqrt{6} + \overline{EF} + 2e$ Zusammenfassen

$e\left(9 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = 3e + 2 \cdot \overline{EF} + e\sqrt{3} + e\sqrt{6}$

$e\left(9 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = 3e + 2 \cdot \overline{EF} + e\sqrt{3} + e\sqrt{6}$

$e\left(9 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = 3e + 2 \cdot \overline{EF} + e\sqrt{3} + e\sqrt{6}$ Summe ausmultiplizieren

$9e + e\sqrt{3} + e\sqrt{6} = 3e + 2 \cdot \overline{EF} + e\sqrt{3} + e\sqrt{6}$

$9e + e\sqrt{3} + e\sqrt{6} = 3e + 2 \cdot \overline{EF} + e\sqrt{3} + e\sqrt{6} \quad |-3e$

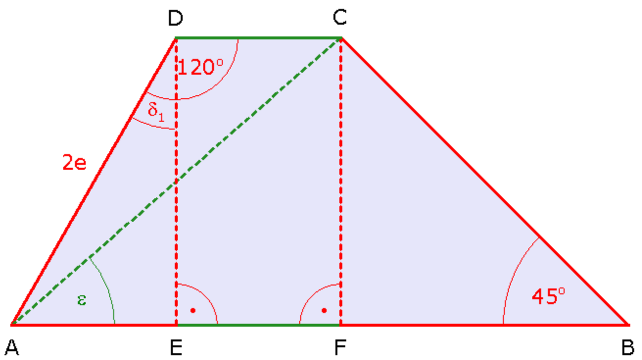
$6e + e\sqrt{3} + e\sqrt{6} = 2 \cdot \overline{EF} + e\sqrt{3} + e\sqrt{6} \quad |-e\sqrt{3} - e\sqrt{6}$

$6e = 2 \cdot \overline{EF}$ Seiten tauschen

$2 \cdot \overline{EF} = 6e \quad |:2$

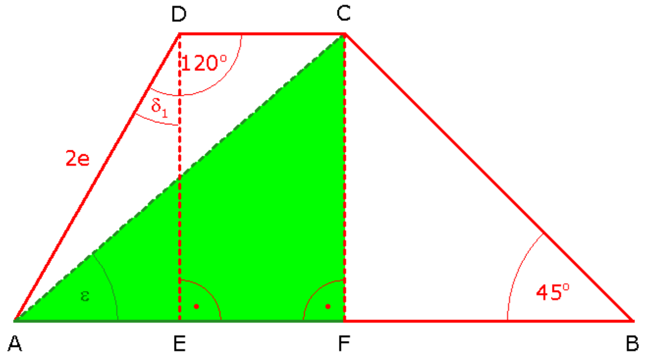
$\overline{EF} = 3e$

$\overline{CD} = 3e$



Lösung 2002 W1b:

7. Berechnung der Strecke $\overline{AF}$:

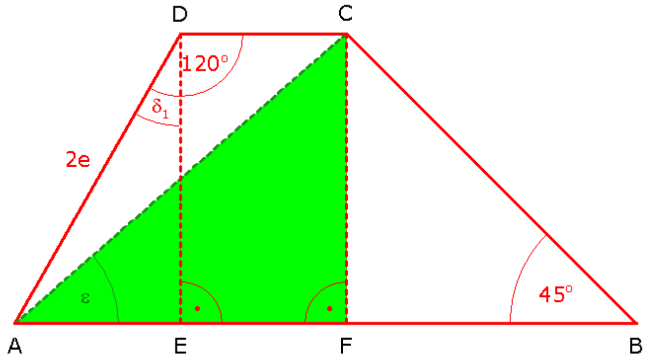


$$\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF}$$

$$\overline{AF} = e + 3e$$

$$\underline{\overline{AF} = 4e}$$

8. Berechnung von $\tan\varepsilon$:



$$\tan\varepsilon = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$$ Tangensfunktion im rechtwinkligen grünen Teildreieck AFC

$$\tan\varepsilon = \frac{e\sqrt{3}}{4e}$$

$$\tan\varepsilon = \frac{\cancel{e}\sqrt{3}}{4\cancel{e}}$$ Kürzen

$$\underline{\underline{\tan\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{4}}}$$