Wahlaufgaben

Aufgabe 2001 W3b: 4 P

Eine nach oben geöffnete verschobene Normalparabel wird von der Geraden g in den Punkten $P_1(1|3)$ und $P_2(6|8)$ geschnitten.

Eine zur Geraden g parallele Gerade h geht durch den Punkt $B(3,5|-0,75)$.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass B der einzige gemeinsame Punkt der Parabel und der Geraden h ist.

Lösung 2001 W3b:

1. Berechnung der Funktionsgleichung der Parabel p:

$y = x^2 + px + q$ Allgemeine Normalparabelgleichung

$\mathrm{I}: 3 = 1^2 + p \cdot 1 + q$ Punktkoordinaten einsetzen: $P_1(1|3)$

$\mathrm{II}: 8 = 6^2 + p \cdot 6 + q$ Punktkoordinaten einsetzen: $P_2(6|8)$

$\mathrm{I}: 3 = 1 + p + q$

$\mathrm{II}: 8 = 36 + 6p + q$ Seiten tauschen

$\mathrm{I}: 1 + p + q = 3 \quad | -1-p$

$\mathrm{II}: 36 + 6p + q = 8 \quad | -36-6p$

$\mathrm{I}: q = 2 - p$

$\mathrm{II}: q = -28 - 6p$ Gleichsetzverfahren

$\mathrm{I} = \mathrm{II}: 2 - p = -28 - 6p \quad | +6p$

$2 + 5p = -28 \quad | -2$

$5p = -30 \quad | :5$

$\underline{p = -6}$

$\mathrm{I}: 3 = 1 - 6 + q$ $p = -6$ in I einsetzen

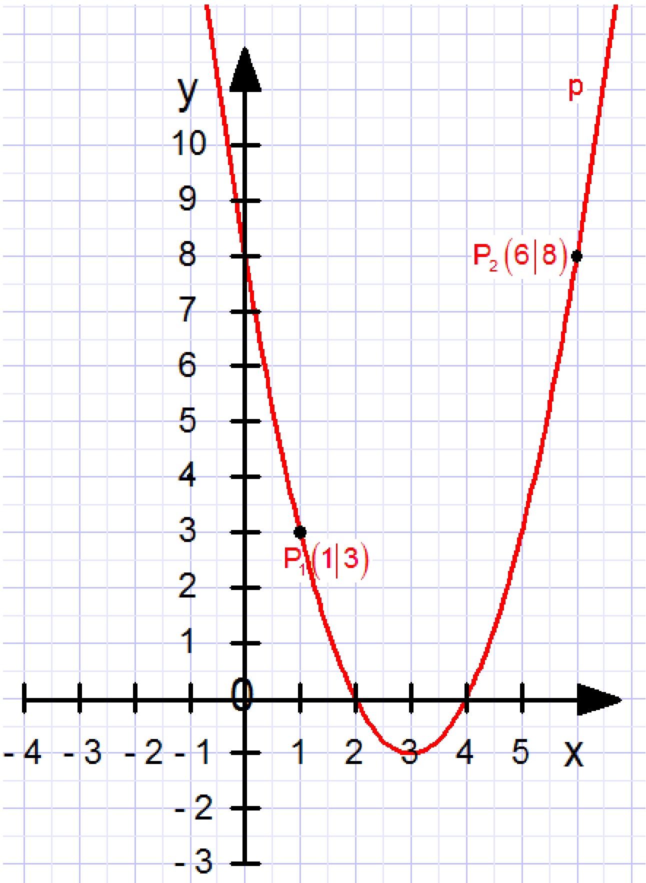
$3 = 1 - 6 + q$ Zusammenfassen

$3 = -5 + q$ Seiten tauschen

$-5 + q = 3 \quad | +5$

$\underline{q = 8}$

$\underline{p: y = x^2 - 6x + 8}$



Lösung 2001 W3b:

2. Berechnung der Funktionsgleichung der Geraden g:

$y = m \cdot x + b$ — Allgemeine Geradengleichung

$\begin{array}{l|} \text{I}: 3 = m \cdot 1 + b \\ \text{II}: 8 = m \cdot 6 + b \end{array}$ — Punktkoordinaten einsetzen: $P_1(1|3)$; Punktkoordinaten einsetzen: $P_2(6|8)$

$\begin{array}{l|} \text{I}: 3 = m + b \\ \text{II}: 8 = 6m + b \end{array}$ — Seiten tauschen

$\begin{array}{l|} \text{I}: m + b = 3 \\ \text{II}: 6m + b = 8 \end{array}$ $\begin{array}{|l} -m \\ -6m \end{array}$

$\begin{array}{l|} \text{I}: b = 3 - m \\ \text{II}: b = 8 - 6m \end{array}$ — Gleichsetzverfahren

$\text{I} = \text{II}: 3 - m = 8 - 6m \quad | + 6m$

$3 + 5m = 8 \quad | - 3$

$5m = 5 \quad : 5$

$\underline{m = 1}$

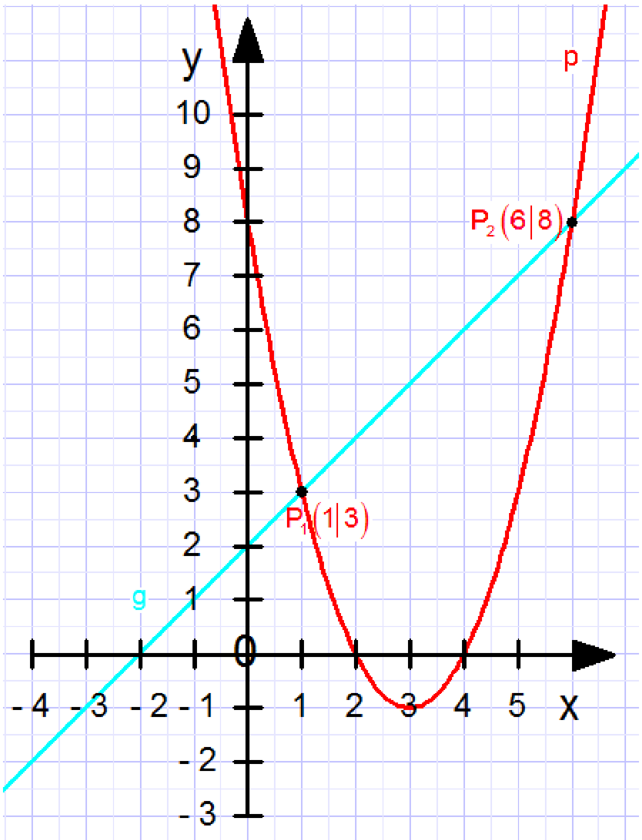
$\text{I}: 3 = 1 + b$ — m = 1 in I einsetzen

$3 = 1 + b$ — Seiten tauschen

$1 + b = 3 \quad | - 1$

$\underline{b = 2}$

$\underline{g: y = x + 2}$



3. Berechnung der Funktionsgleichung der Geraden h:

$y = m \cdot x + b$ — Allgemeine Geradengleichung

$y = 1 \cdot x + b$ — da $g \parallel h \Rightarrow m = 1$

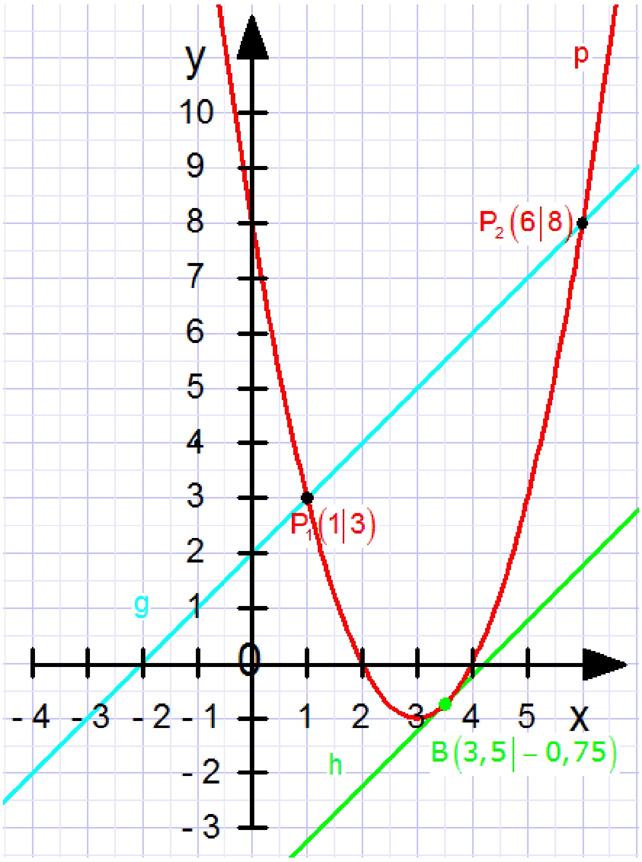
$y = x + b$ — Punktkoordinaten einsetzen: $B(3,5|-0,75)$

$-0,75 = 3,5 + b$ — Seiten tauschen

$3,5 + b = -0,75 \quad | - 3,5$

$\underline{b = -4,25}$

$\underline{h: y = x - 4,25}$



Lösung 2001 W3b:

4. Beweis, daß $B(3,5|-0,75)$ einziger Schnittpunkt von p und h ist:

$$\left.\begin{array}{l} I: y = x^2 - 6x + 8 \\ II: y = x - 4,25 \end{array}\right|$$ Gleichsetzverfahren

$I = II: x^2 - 6x + 8 = x - 4,25 \quad |-x$

$x^2 - 7x + 8 = -4,25 \quad |+4,25$

$x^2 - 7x + 12,25 = 0$ Quadratische Gleichung in der Normalform

$x^2 - 7x + 12,25 = 0$

$x^2 + px + q = 0$ p und q bestimmen

$P = -7$

$q = 12,25$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ Lösungsformel

$x_{1,2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\frac{(-7)^2}{4} - 12,25}$

$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 12,25}$

$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{12,25 - 12,25}$

$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{0}$

$x_{1,2} = 3,5 \pm 0$

$\underline{x_1 = x_2 = 3,5}$ Es gibt nur eine Lösung!
x = 3,5

$II: y = 3,5 - 4,25$ x = 3,5 in II einsetzen

$\underline{y = -0,75}$

Einziger Schnittpunkt:
$\underline{\underline{(3,5|-0,75)}}$ B ist der einzige Schnittpunkt!