

Wahlaufgaben

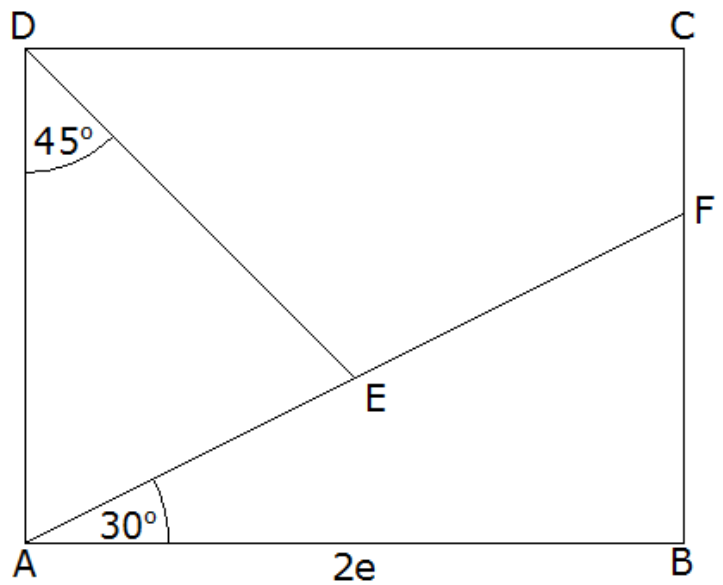
Aufgabe 1999 W1b:

3,5 P

Im nebenstehenden Rechteck ABCD halbiert der Punkt E die Länge von $\overline{AF}$. Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass sich der Flächeninhalt des Teildreiecks AED mit der Formel

$$A = \frac{e^2}{6} (3 + \sqrt{3})$$

berechnen lässt.



Strategie 1999 W1b:

Gegeben:

Rechteck ABCD

$$\overline{AB} = 2e$$

$$\alpha_1 = 30^\circ$$

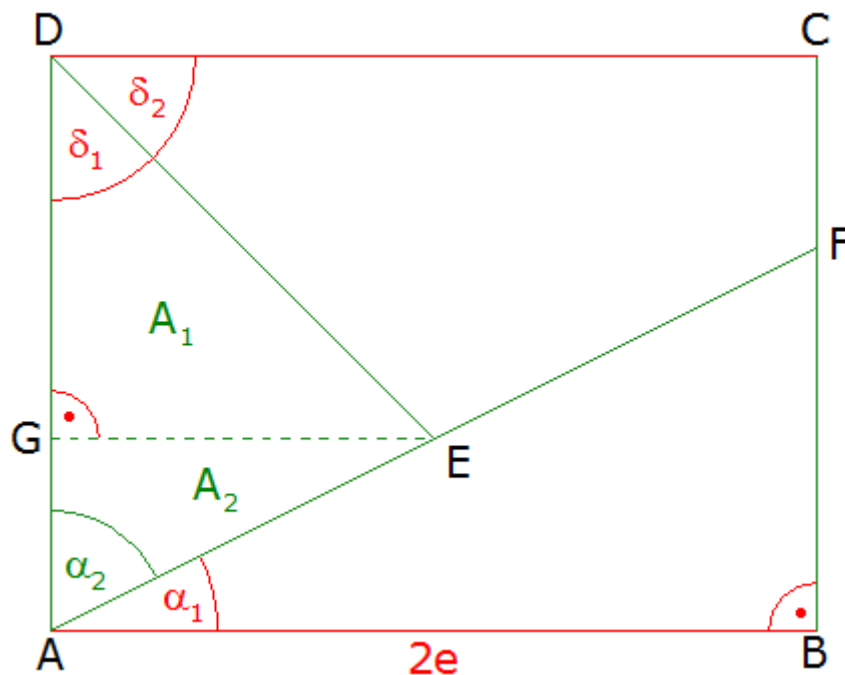
$$\delta_1 = \delta_2 = 45^\circ$$

$$\overline{AE} = \overline{EF}$$

Gesucht:

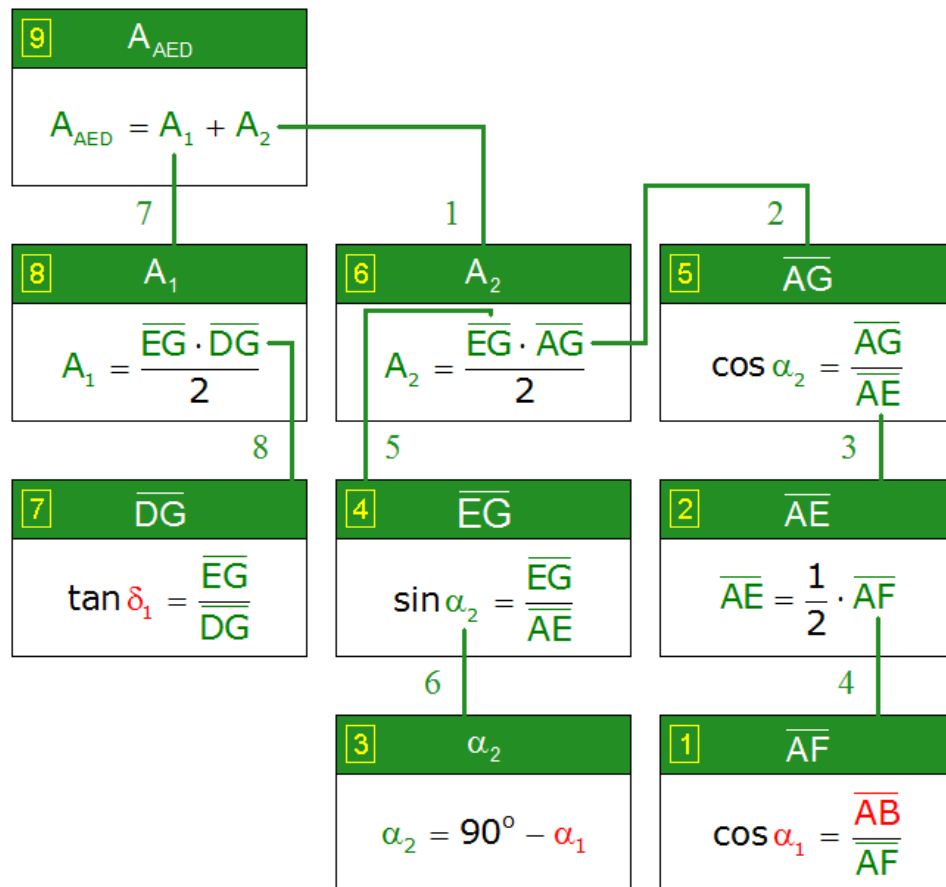
$$A_{AED} = \frac{e^2}{6} (3 + \sqrt{3})$$

Skizze:



Strategie 1999 W1b:

Struktogramm:



Lösung 1999 W1b:

1. Berechnung der Strecke $\overline{AF}$:

$$\cos \alpha_1 = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}$$

Kosinusfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$\cos 30^\circ = \frac{2e}{\overline{AF}}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2e}{\overline{AF}}$$

$$\overline{AF} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = 2e$$

$$\overline{AF} \cdot \sqrt{3} = 4e$$

$$\overline{AF} = \frac{4e}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{AF} = \frac{4e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\overline{AF} = \frac{4e\sqrt{3}}{3}$$

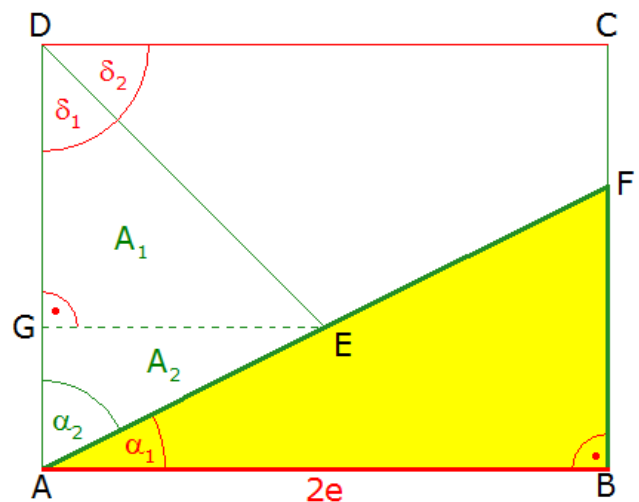
$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$| \cdot \overline{AF}$$

$$| \cdot 2$$

$$| : \sqrt{3}$$

Nenner rational machen



Lösung 1999 W1b:

2. Berechnung der Strecke $\overline{AE}$:

$$\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AF} \quad \text{siehe Aufgabenstellung}$$

$$\overline{AE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4e\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{AE} = \frac{2 \cdot 2 \cdot e\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$$

$$\overline{AE} = \frac{2 \cdot \cancel{2} \cdot e\sqrt{3}}{\cancel{2} \cdot 3} \quad \text{kürzen}$$

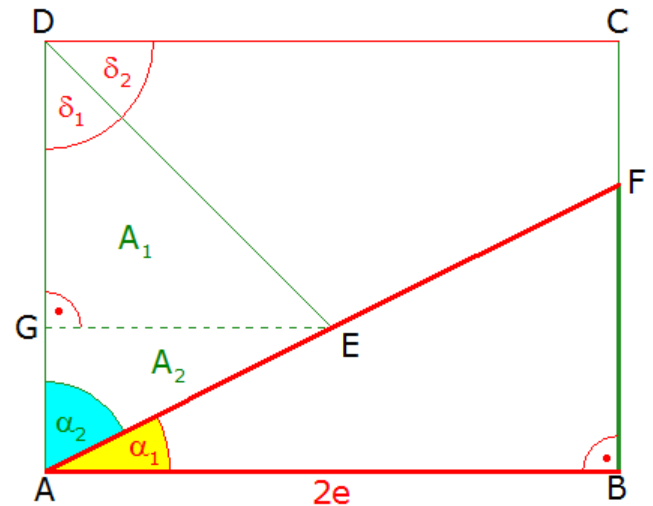
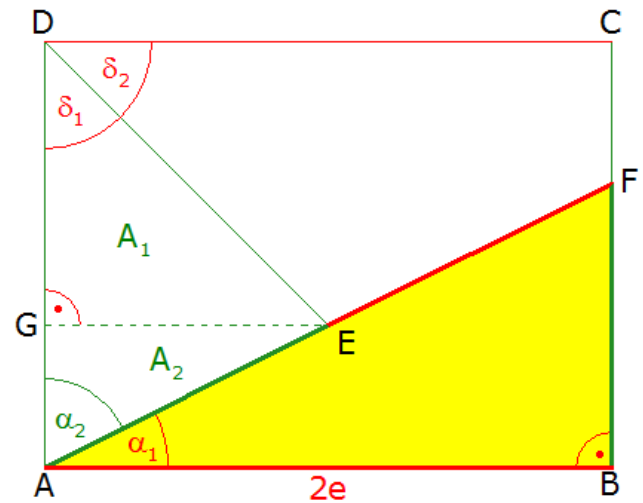
$$\overline{AE} = \frac{2e\sqrt{3}}{3}$$

3. Berechnung des Winkels α_2 :

$$\alpha_2 = 90^\circ - \alpha_1$$

$$\alpha_2 = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha_2 = 60^\circ$$



4. Berechnung der Strecke $\overline{EG}$:

$$\sin \alpha_2 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}} \quad \begin{array}{l} \text{Sinusfunktion im} \\ \text{rechtwinkligen} \\ \text{hellblauen} \\ \text{Teildreieck AEG} \end{array}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{EG}}{\frac{2e\sqrt{3}}{3}}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\overline{EG}}{\frac{2e\sqrt{3}}{3}}$$

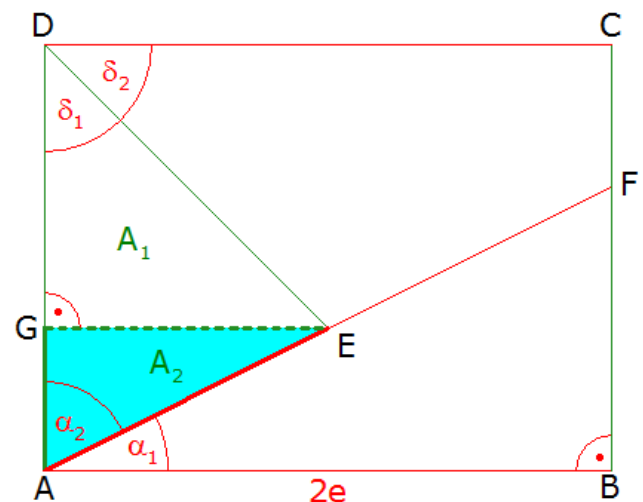
Seiten tauschen

$$\frac{\overline{EG}}{\frac{2e\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\left| \cdot \frac{2e\sqrt{3}}{3} \right.$$

$$\overline{EG} = \frac{2e\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\overline{EG} = \frac{2}{3} \cdot e \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$



Lösung 1999 W1b:

$$\overline{EG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot e$$

$$\overline{EG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot e$$

$$\overline{EG} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{3} \cdot e \quad \text{kürzen}$$

$$\overline{EG} = e$$

5. Berechnung der Strecke $\overline{AG}$:

$$\cos \alpha_2 = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} \quad \begin{array}{l} \text{Kosinusfunktion im} \\ \text{rechtwinkligen} \\ \text{hellblauen} \\ \text{Teildreieck AEG} \end{array}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AG}}{\frac{2e\sqrt{3}}{3}} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{AG}}{\frac{2e\sqrt{3}}{3}} \quad \text{Seiten tauschen}$$

$$\frac{\overline{AG}}{\frac{2e\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \quad \left| \cdot \frac{2e\sqrt{3}}{3} \right.$$

$$\overline{AG} = \frac{2e\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{AG} = \frac{\cancel{2}e\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} \quad \text{kürzen}$$

$$\overline{AG} = \frac{e\sqrt{3}}{3}$$

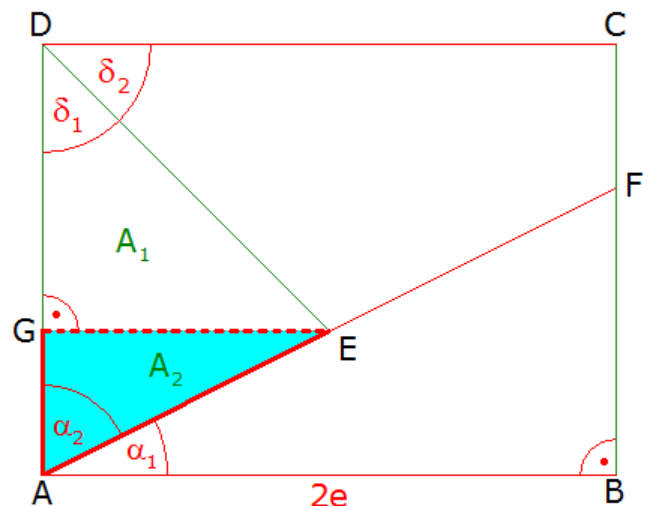
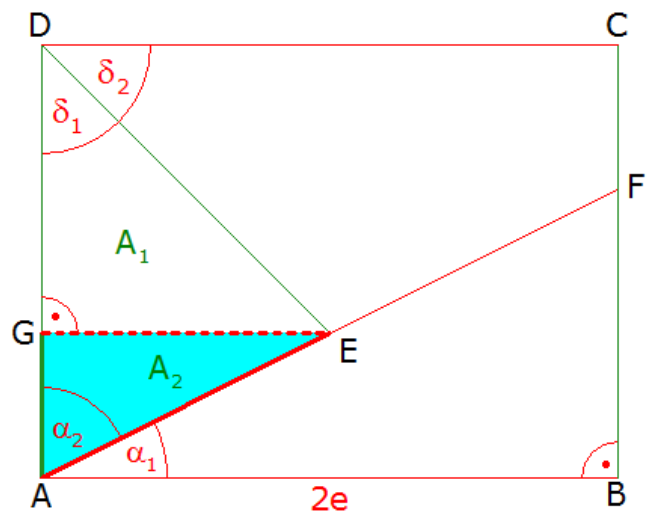
6. Berechnung der Dreiecksfläche A_2 :

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{EG} \cdot \overline{AG}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \frac{e\sqrt{3}}{3}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{1} \cdot \frac{e\sqrt{3}}{3}$$

$$A_2 = \frac{e^2 \cdot \sqrt{3}}{6}$$



Lösung 1999 W1b:

7. Berechnung der Strecke $\overline{DG}$:

$$\tan \delta_1 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{DG}} \quad \text{Tangensfunktion im rechtwinkligen grünen Teildreieck}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{e}{\overline{DG}} \quad \tan 45^\circ = 1$$

$$1 = \frac{e}{\overline{DG}} \quad | \cdot \overline{DG}$$

$$\overline{DG} = e$$

8. Berechnung der Dreiecksfläche A_1 :

$$A_1 = \frac{\overline{EG} \cdot \overline{DG}}{2}$$

$$A_1 = \frac{e \cdot e}{2}$$

$$A_1 = \frac{e^2}{2}$$

9. Berechnung der Dreiecksfläche A_{AED} :

$$A_{AED} = A_1 + A_2$$

$$A_{AED} = \frac{e^2}{2} + \frac{e^2 \sqrt{3}}{6}$$

$$A_{AED} = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{3}{3} + \frac{e^2 \sqrt{3}}{6} \quad \text{Gleichnamig machen}$$

$$A_{AED} = \frac{3e^2}{6} + \frac{e^2 \sqrt{3}}{6}$$

$$A_{AED} = 3 \cdot \frac{e^2}{6} + \sqrt{3} \cdot \frac{e^2}{6} \quad \text{Ausklammern des gemeinsamen Faktors } \frac{e^2}{6}$$

$$A_{AED} = \frac{e^2}{6} (3 + \sqrt{3})$$

