Wahlaufgaben

Aufgabe 1997 W3a: 4 P

Eine regelmäßige fünfseitige Pyramide hat die Maße:

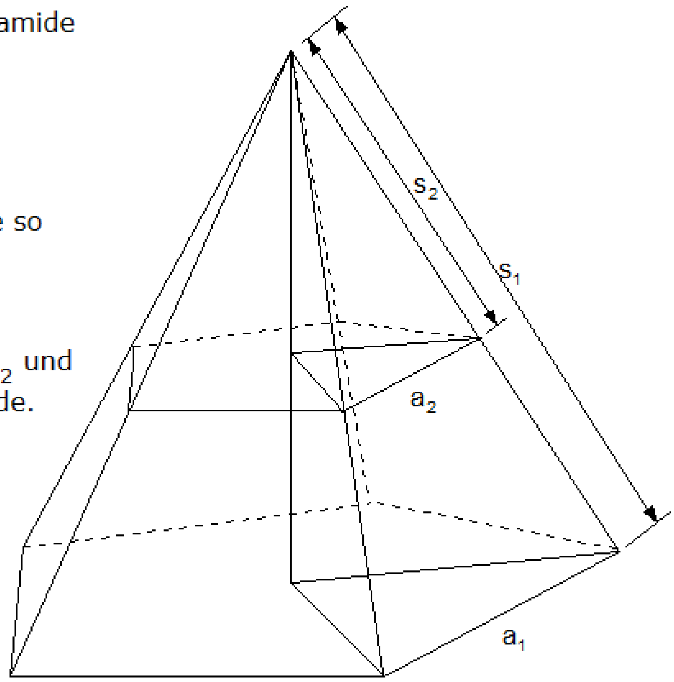
$a_1 = 9{,}4\,cm$

$s_1 = 25{,}3\,cm$

Sie wird parallel zur Grundfläche so geschnitten, daß gilt:

$s_2 = 16{,}7\,cm$

Berechnen Sie die Grundkante a_2 und das Volumen der oberen Pyramide.



Strategie 1997 W3a:

Gegeben:

$a_1 = 9{,}4\,cm$

$s_1 = 25{,}3\,cm$

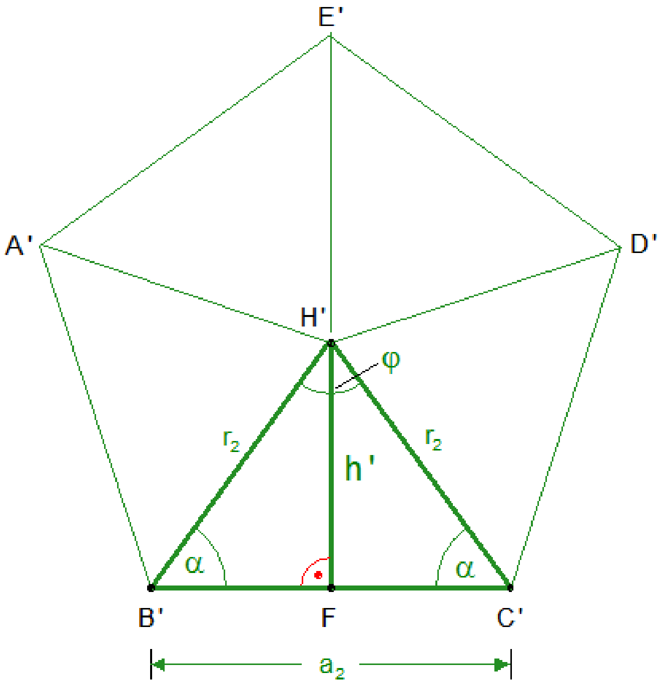
$s_2 = 16{,}7\,cm$

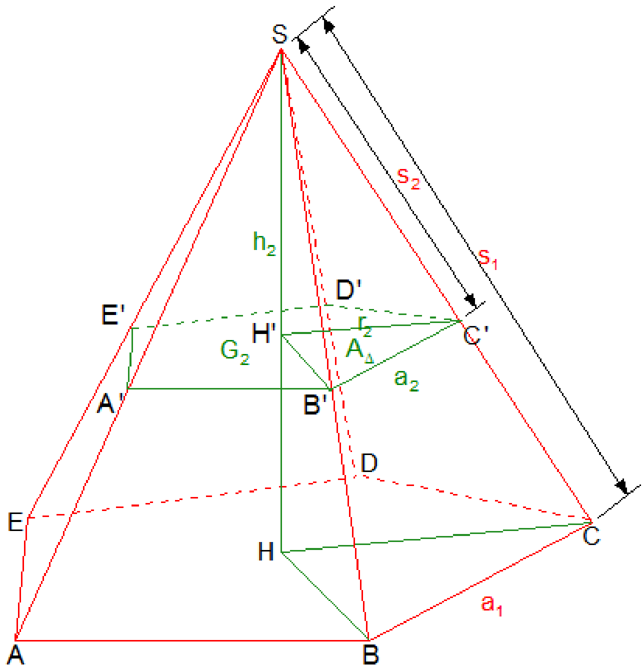
Gesucht:

a_2

V_{Pyr_oben}

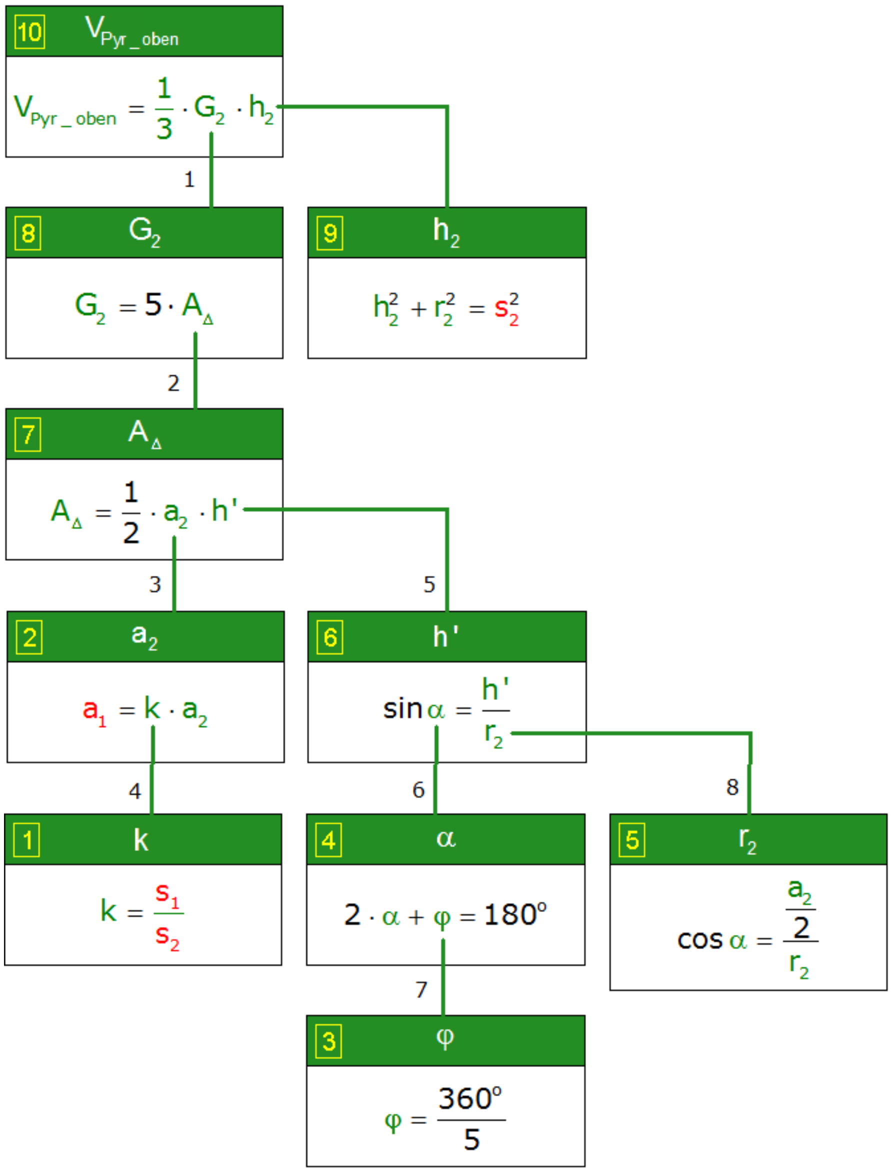
Skizze:





Strategie 1997 W3a:

Struktogramm:



Lösung 1997 W3a:

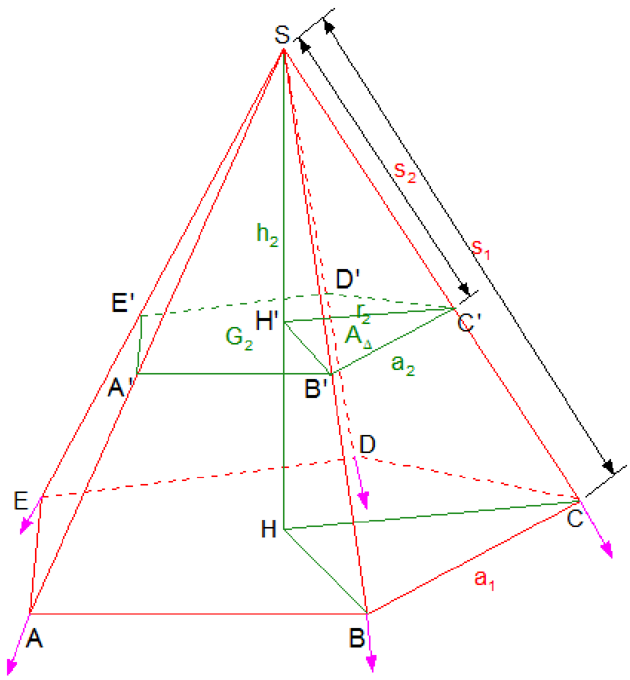
1. Berechnung des Streckfaktors k:

$s_1 = k \cdot s_2$ Zentrische Streckung mit Zentrum S

$25{,}3 = k \cdot 16{,}7$ Seiten tauschen

$k \cdot 16{,}7 = 25{,}3 \quad | : 16{,}7$

$\underline{k = 1{,}515}$



Lösung 1997 W3a:

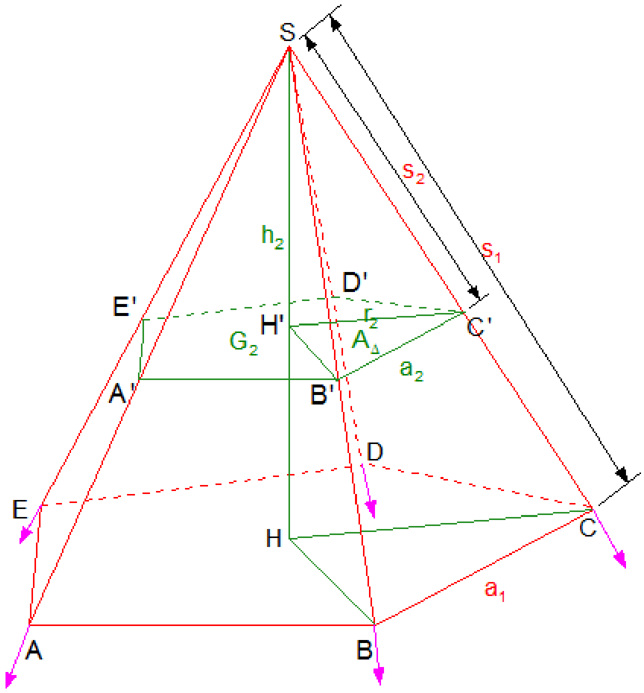
2. Berechnung der oberen Pyramiden-Grundseite a_2:

$a_1 = k \cdot a_2$ Zentrische Streckung mit Zentrum S

$9{,}4 = 1{,}515 \cdot a_2$ Seiten tauschen

$1{,}515 \cdot a_2 = 9{,}4 \quad |:1{,}515$

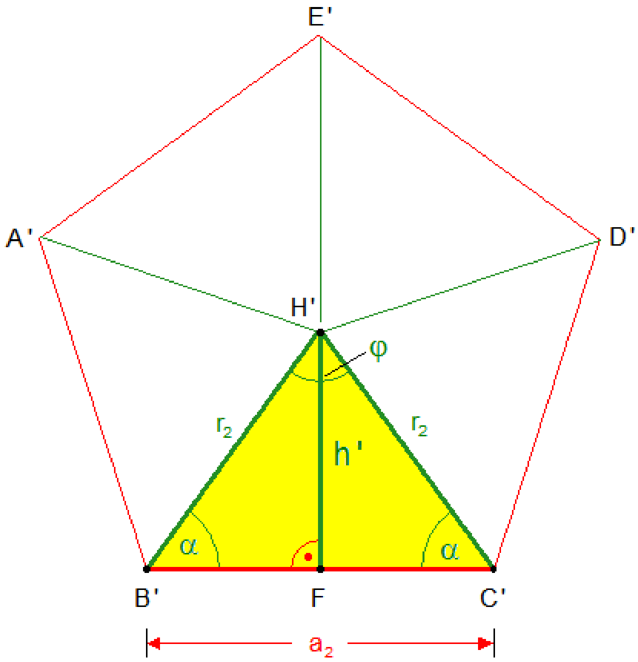
$\underline{\underline{a_2 = 6{,}2\,\text{cm}}}$



3. Berechnung des Winkels φ:

$\varphi = \dfrac{360^\circ}{5}$ 5 gleichschenklige Dreiecke am Punkt H'

$\underline{\varphi = 72^\circ}$



Lösung 1997 W3a:

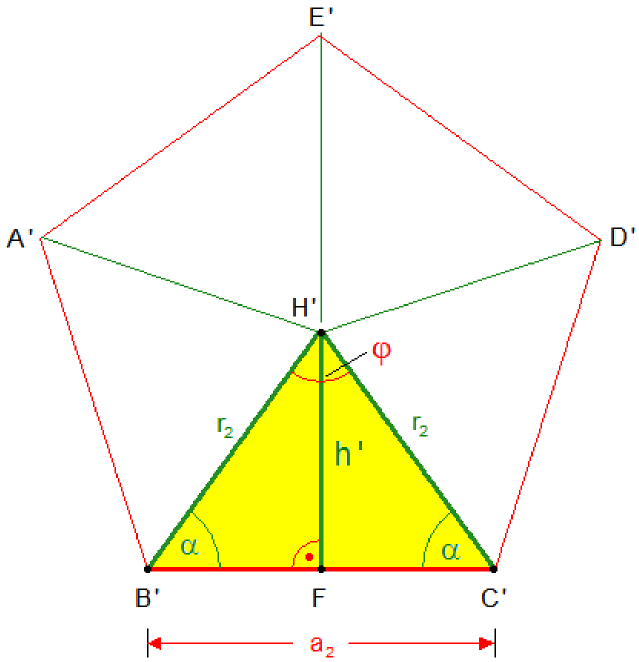
4. Berechnung des Winkels α:

$2 \cdot \alpha + \varphi = 180^\circ$ gleichschenkliges Dreieck: Basiswinkel gleich groß

$2 \cdot \alpha + 72^\circ = 180^\circ \quad | -72^\circ$

$2 \cdot \alpha = 108^\circ \quad | :2$

$\underline{\alpha = 54^\circ}$



5. Berechnung des Radius r_2:

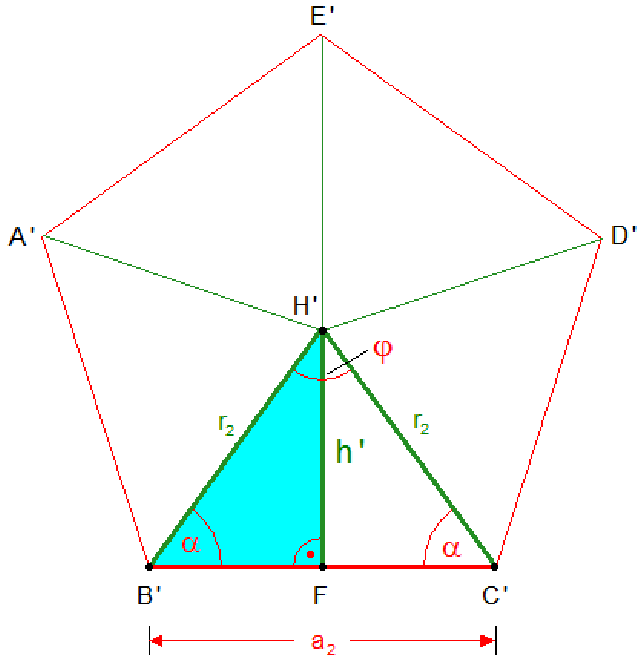
$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a_2}{2}}{r_2}$ Kosinusfunktion im rechtwinkligen hellbauen Teildreieck B'FH'

$\cos 54^\circ = \frac{\frac{6,2}{2}}{r_2}$

$0,5878 = \frac{3,1}{r_2} \quad | \cdot r_2$

$r_2 \cdot 0,5878 = 3,1 \quad | :0,5878$

$\underline{r_2 = 5,3\,\text{cm}}$



6. Berechnung der Dreieckshöhe h':

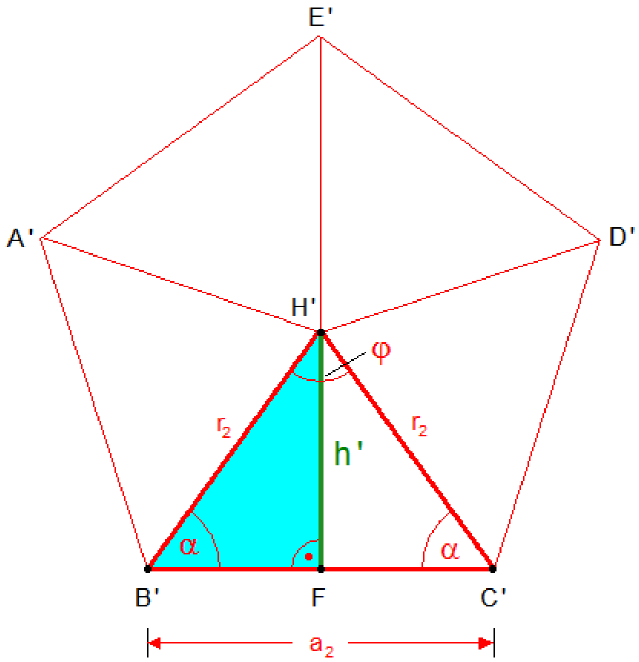
$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h'}{r_2}$ Sinusfunktion im rechtwinkligen hellbauen Teildreieck B'FH'

$\sin 54^\circ = \frac{h'}{5,3}$

$0,8090 = \frac{h'}{5,3}$ Seiten tauschen

$\frac{h'}{5,3} = 0,8090 \quad | \cdot 5,3$

$\underline{h' = 4,3\,\text{cm}}$



Lösung 1997 W3a:

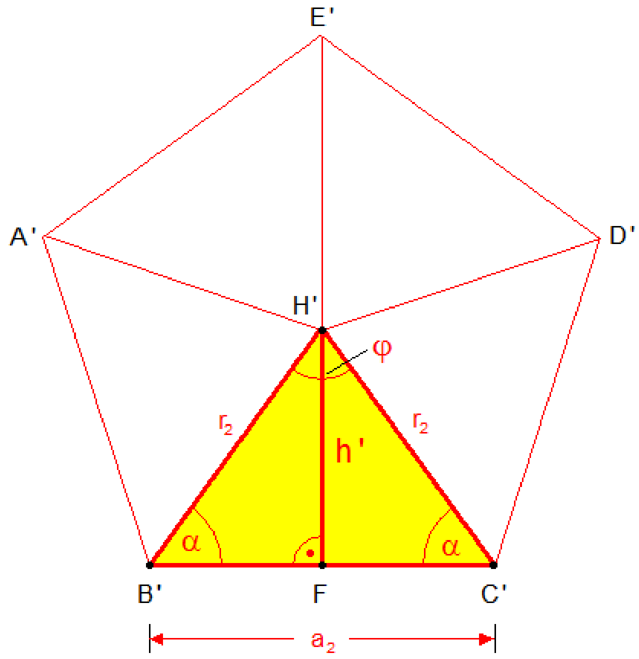
7. Berechnung der Dreiecksfläche A_Δ:

$$A_\Delta = \frac{a_2 \cdot h'}{2}$$

siehe gelbes Teildreieck B'C'H'

$$A_\Delta = \frac{6{,}2 \cdot 4{,}3}{2}$$

$$\underline{A_\Delta = 13{,}33\,cm^2}$$

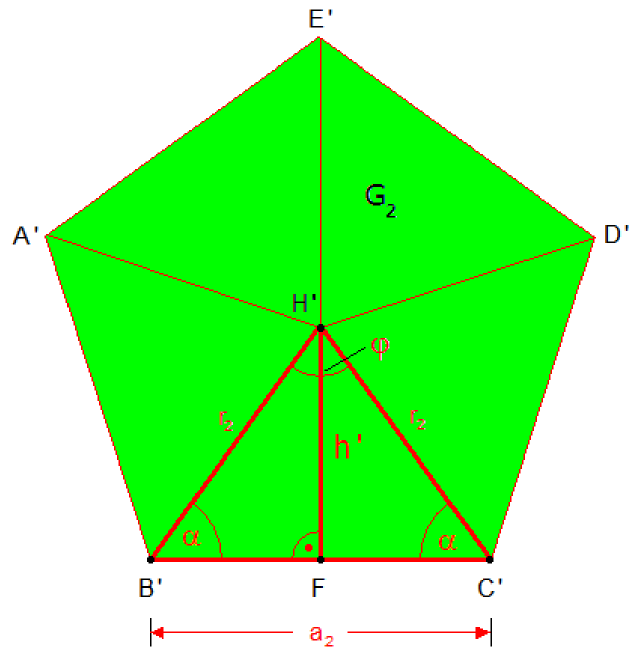


8. Berechnung der Pyramiden-Grundfläche G_2:

$$G_2 = 5 \cdot A_\Delta$$

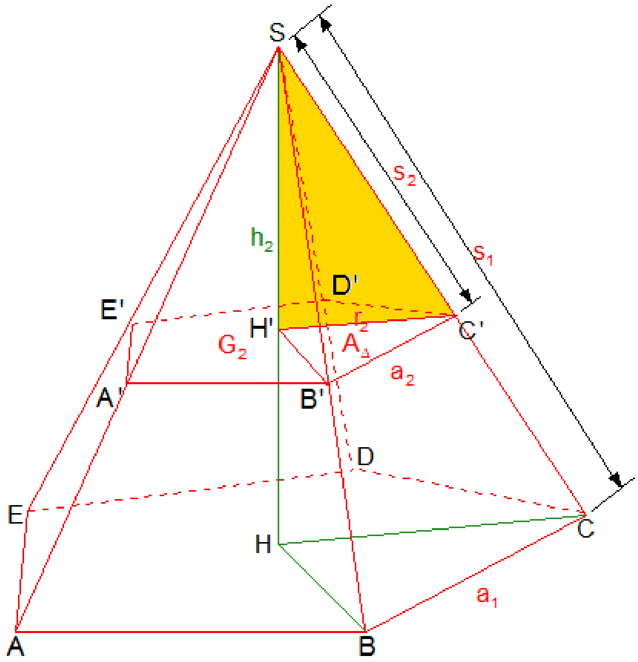
$$G_2 = 5 \cdot 13{,}33$$

$$\underline{G_2 = 66{,}65\,cm^2}$$



Lösung 1997 W3a:

9. Berechnung der Pyramidenhöhe h_2:



$h_2^2 + r_2^2 = s_2^2$ Pythagoras im rechtwinkligen orangefarbenen Teildreieck H'C'S

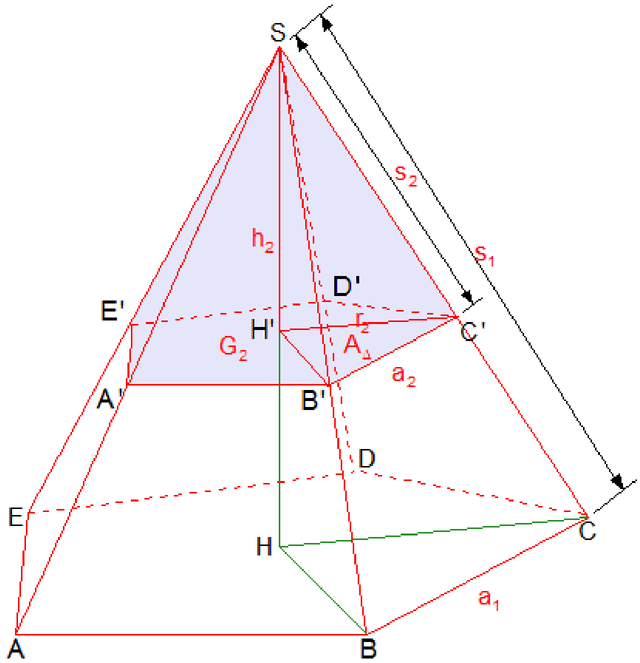
$h_2^2 + 5{,}3^2 = 16{,}7^2$

$h_2^2 + 28{,}09 = 278{,}89 \quad | -28{,}09$

$h_2^2 = 250{,}8 \quad | \sqrt{}$

$\underline{h_2 = 15{,}8\,\text{cm}}$

10. Berechnung des Pyramidenvolumens V_{Pyr_oben}:



$V_{Pyr\_oben} = \frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h_2$

$V_{Pyr\_oben} = \frac{1}{3} \cdot 66{,}65 \cdot 15{,}8$

$\underline{\underline{V_{Pyr\_oben} = 351\,\text{cm}^3}}$