

Wahlaufgaben

Aufgabe 1997 W1b:

4 P

Im Dreieck ABC sind gegeben:

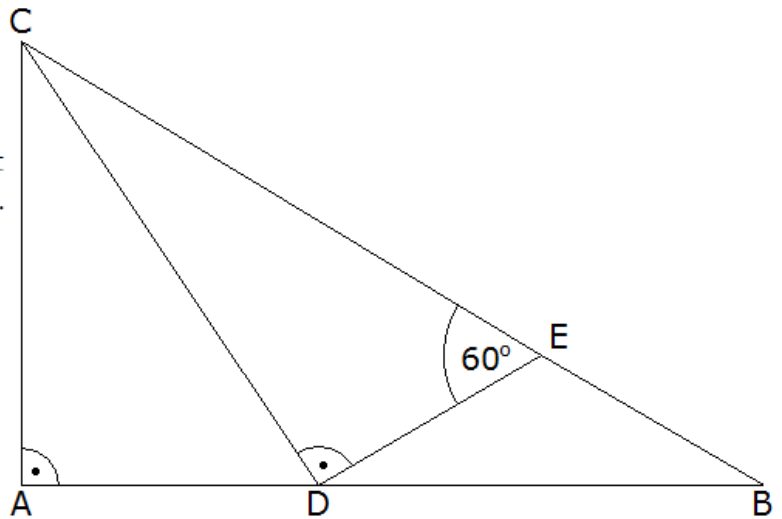
$$\overline{AC} = e$$

$$\overline{AB} = e\sqrt{3}$$

Berechnen Sie die Länge $\overline{DE}$ in Abhängigkeit von e (ohne Verwendung gerundeter Werte). Zeigen Sie, daß sich der Flächeninhalt des Dreiecks DBE mit der Formel

$$A = \frac{e^2}{9} \sqrt{3}$$

berechnen läßt.



Strategie 1997 W1b:

Gegeben:

Dreieck ABC

$$\overline{AC} = e$$

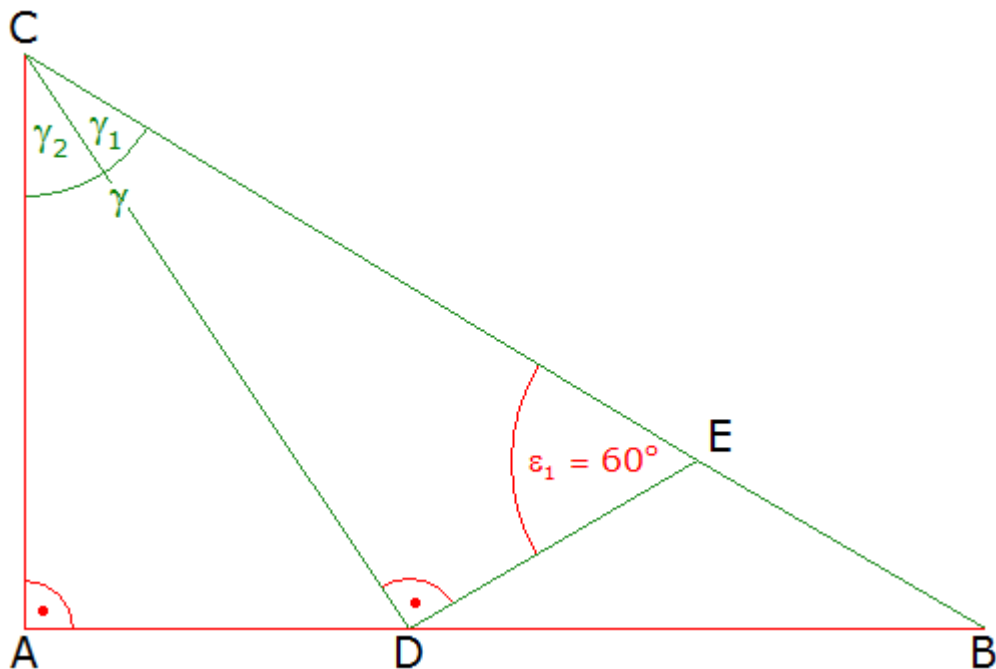
$$\overline{AB} = e\sqrt{3}$$

Gesucht:

$\overline{DE}$

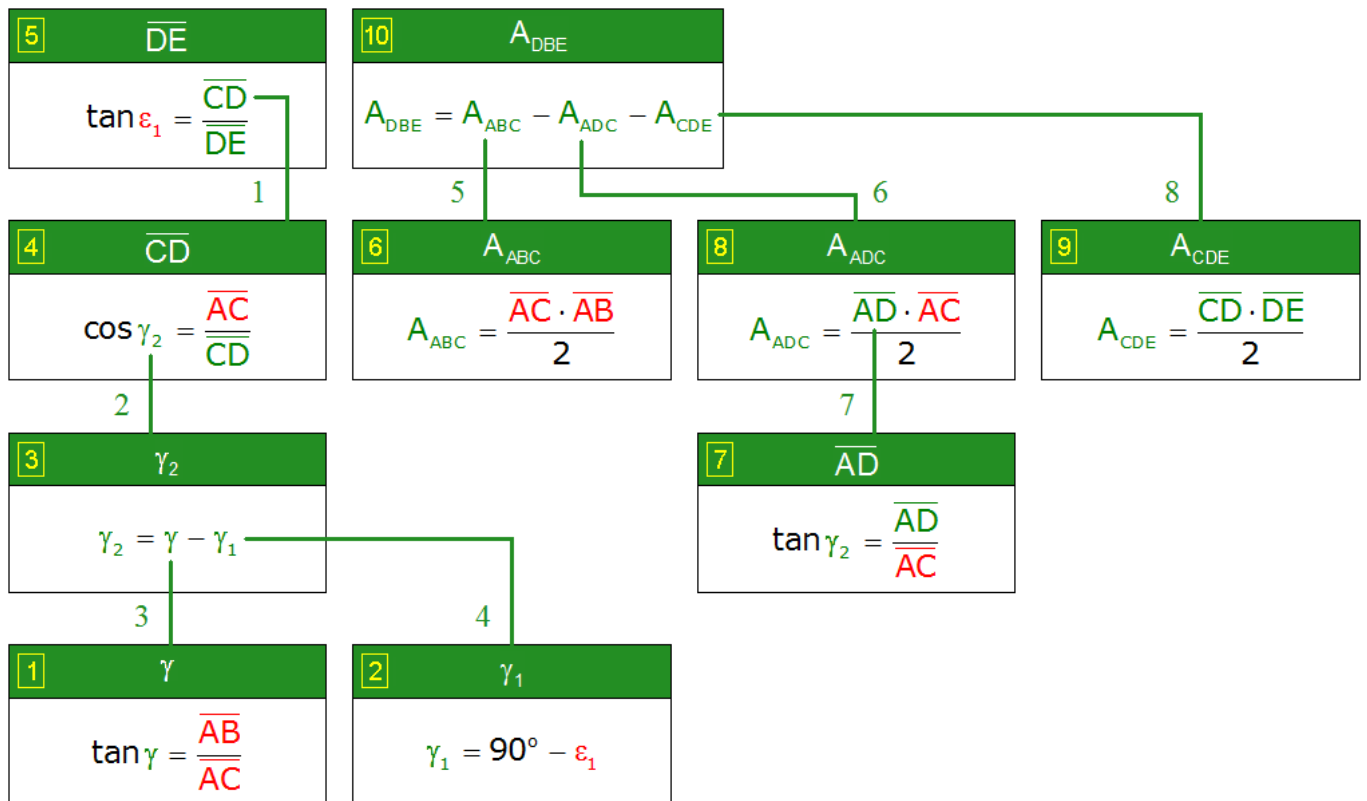
$$A = \frac{e^2}{9} \sqrt{3}$$

Skizze:



Strategie 1997 W1b:

Struktogramm:



Lösung 1997 W1b:

1. Berechnung des Winkels γ :

$$\tan \gamma = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

Tangensfunktion im rechtwinkligen gelben Dreieck ABC

$$\tan \gamma = \frac{e\sqrt{3}}{e}$$

kürzen

$$\tan \gamma = \sqrt{3}$$

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\underline{\gamma = 60^\circ}$$

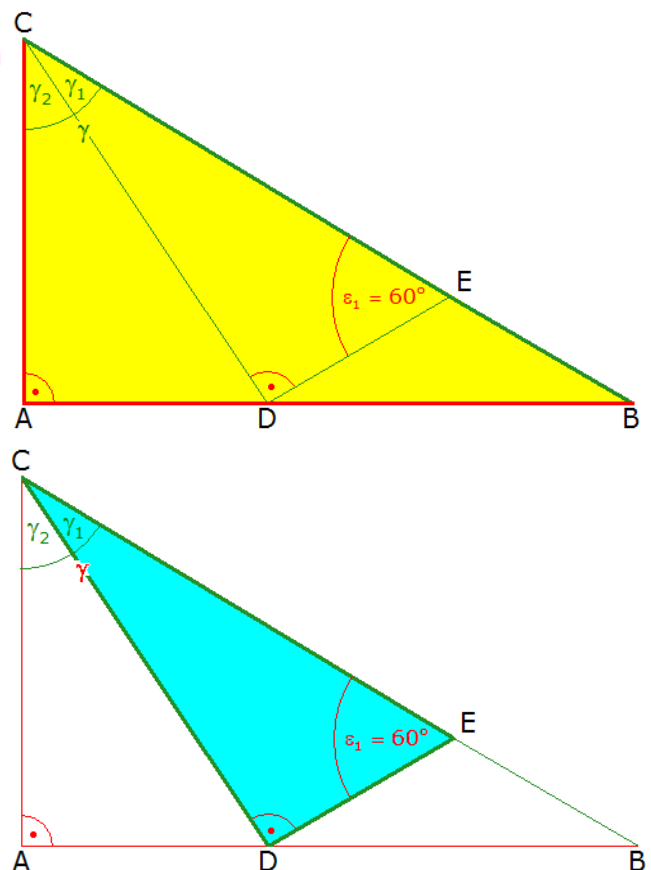
2. Berechnung des Winkels γ_1 :

$$\gamma_1 = 90^\circ - \varepsilon_1$$

Winkelsumme im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck CDE

$$\gamma_1 = 90^\circ - 60^\circ$$

$$\underline{\gamma_1 = 30^\circ}$$



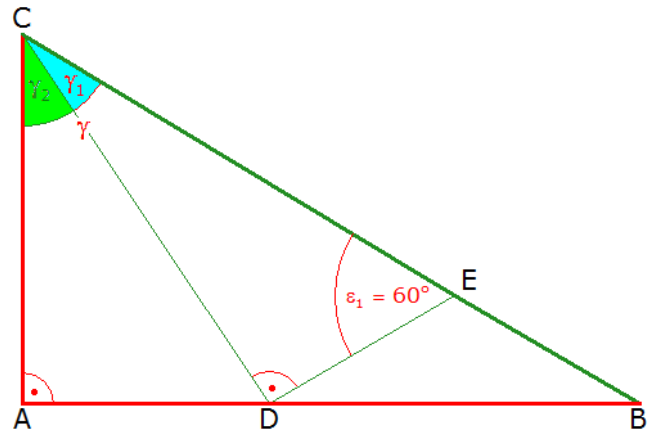
Lösung 1997 W1b:

3. Berechnung des Winkels γ_2 :

$$\gamma_2 = \gamma - \gamma_1 \quad \text{Winkelsumme in der Ecke C}$$

$$\gamma_2 = 60^\circ - 30^\circ$$

$$\underline{\gamma_2 = 30^\circ}$$



4. Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

$$\cos \gamma_2 = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} \quad \begin{array}{l} \text{Kosinusfunktion im} \\ \text{rechtwinkligen} \\ \text{grünen Teildreieck} \end{array}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{e}{\overline{CD}} \quad \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{e}{\overline{CD}} \quad | \cdot \overline{CD}$$

$$\overline{CD} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = e \quad | \cdot 2$$

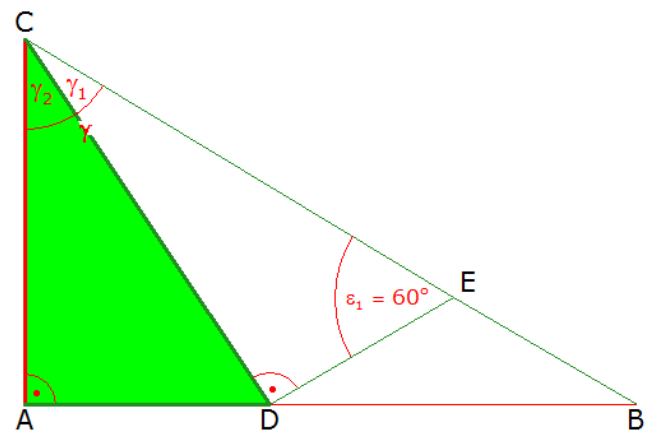
$$\overline{CD} \cdot \sqrt{3} = 2e \quad | : \sqrt{3}$$

$$\overline{CD} = \frac{2e}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{CD} = \frac{2e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \quad \begin{array}{l} \text{Nenner rational} \\ \text{machen} \end{array}$$

$$\overline{CD} = \frac{2e \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{\overline{CD} = \frac{2}{3}e\sqrt{3}}$$



5. Berechnung der Strecke $\overline{DE}$:

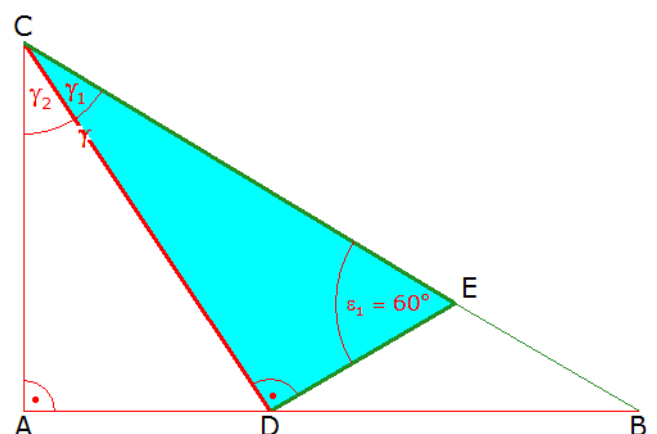
$$\tan \epsilon_1 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} \quad \begin{array}{l} \text{Tangensfunktion im} \\ \text{rechtwinkligen} \\ \text{hellblauen} \\ \text{Teildreieck DEC} \end{array}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{2}{3}e\sqrt{3}}{\overline{DE}} \quad | \cdot \overline{DE}$$

$$\overline{DE} \cdot \tan 60^\circ = \frac{2}{3}e\sqrt{3} \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\overline{DE} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}e\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{\overline{DE} = \frac{2}{3}e}}$$



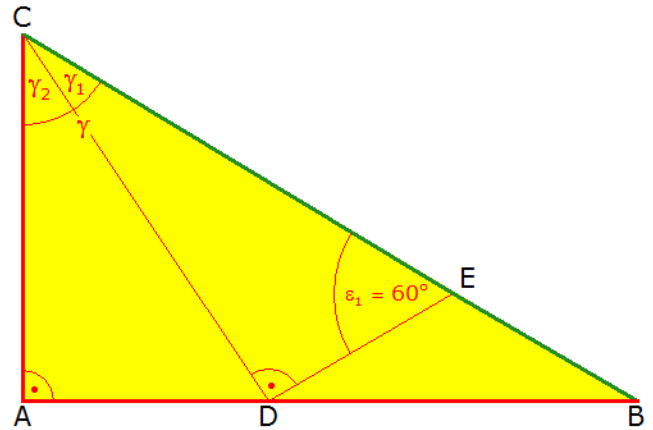
Lösung 1997 W1b:

6. Berechnung der Dreiecksfläche A_{ABC} :

$$A_{ABC} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{2} \quad \text{Flächenformel rechtwinkliges gelbes Dreieck ABC}$$

$$A_{ABC} = \frac{e \cdot e\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{3}$$



7. Berechnung der Strecke $\overline{AD}$:

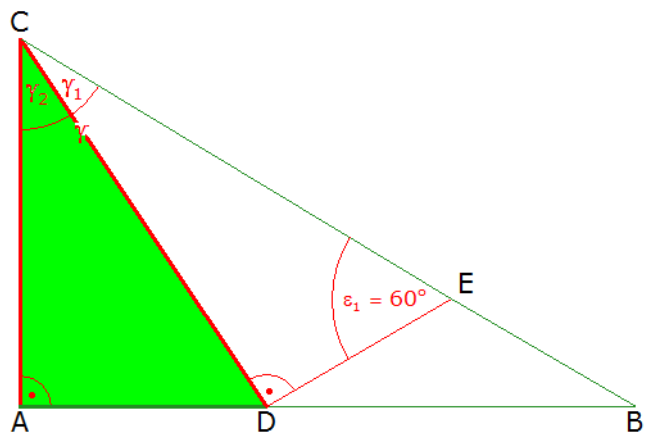
$$\tan \gamma_2 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \quad \text{Tangensfunktion im rechtwinkligen grünen Teildreieck}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{AD}}{e} \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{\overline{AD}}{e} \quad \text{Seiten tauschen}$$

$$\frac{\overline{AD}}{e} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \quad | \cdot e$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{3} e \sqrt{3}$$



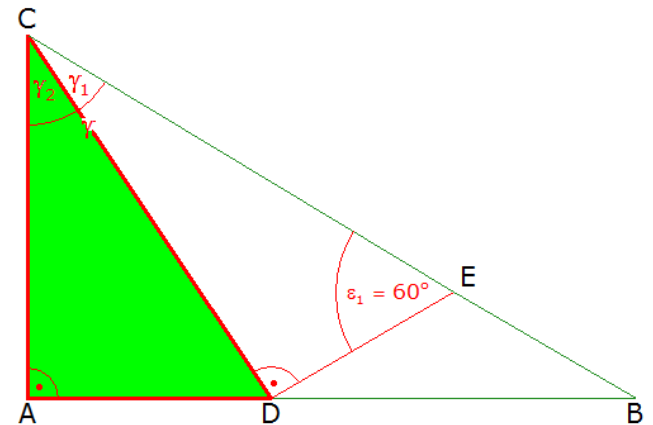
8. Berechnung der Dreiecksfläche A_{ADC} :

$$A_{ADC} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AC}}{2} \quad \text{Flächenformel rechtwinkliges grünes Teildreieck ADC}$$

$$A_{ADC} = \frac{\frac{1}{3} e \sqrt{3} \cdot e}{2}$$

$$A_{ADC} = \frac{\frac{1}{3} e^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$A_{ADC} = \frac{1}{6} e^2 \sqrt{3}$$



Lösung 1997 W1b:

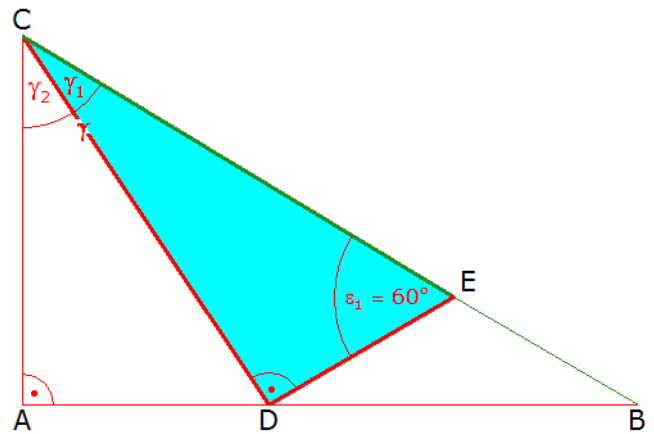
9. Berechnung der Dreiecksfläche A_{CDE} :

$$A_{CDE} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{DE}}{2} \quad \text{Flächenformel rechtwinkliges hellblaues Teildreieck CDE}$$

$$A_{CDE} = \frac{\frac{2}{3}e\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}e}{2}$$

$$A_{CDE} = \frac{\frac{4}{9}e^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{CDE} = \frac{2}{9}e^2\sqrt{3}$$



10. Berechnung der Dreiecksfläche A_{DBE} :

$$A_{DBE} = A_{ABC} - A_{ADC} - A_{CDE}$$

$$A_{DBE} = \frac{1}{2}e^2\sqrt{3} - \frac{1}{6}e^2\sqrt{3} - \frac{2}{9}e^2\sqrt{3}$$

$$A_{DBE} = \frac{9}{18}e^2\sqrt{3} - \frac{3}{18}e^2\sqrt{3} - \frac{4}{18}e^2\sqrt{3}$$

$$A_{DBE} = \frac{2}{18}e^2\sqrt{3}$$

$$A_{DBE} = \frac{1}{9}e^2\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{A_{DBE} = \frac{e^2}{9}\sqrt{3}}}$$

