Wahlaufgaben

Aufgabe 1996 W3b: 4 P

Aus einem Kegelstumpf wurde ein zweiter Kegelstumpf mit gleicher Höhe herausgearbeitet.

Es gilt:

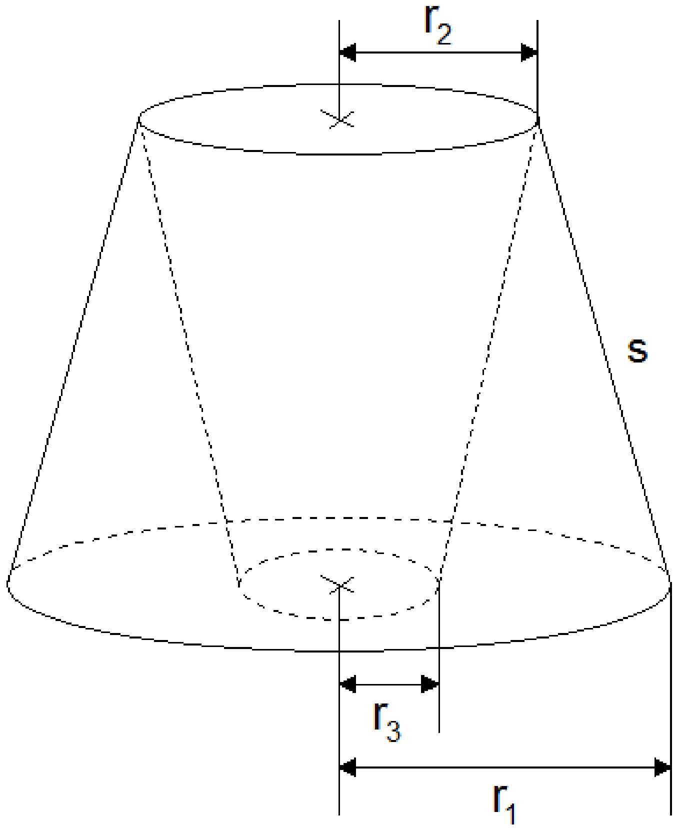
$r_1 = 4e$

$r_2 = 2e$

$s = 2e\sqrt{5}$

Das Volumen des herausgearbeiteten Kegelstumpfs beträgt 25% des Volumens des ursprünglichen Kegelstumpfs.

Berechnen Sie den Radius r_3 in Abhängigkeit von e.



Strategie 1996 W3b:

Gegeben:

$r_1 = 4e$

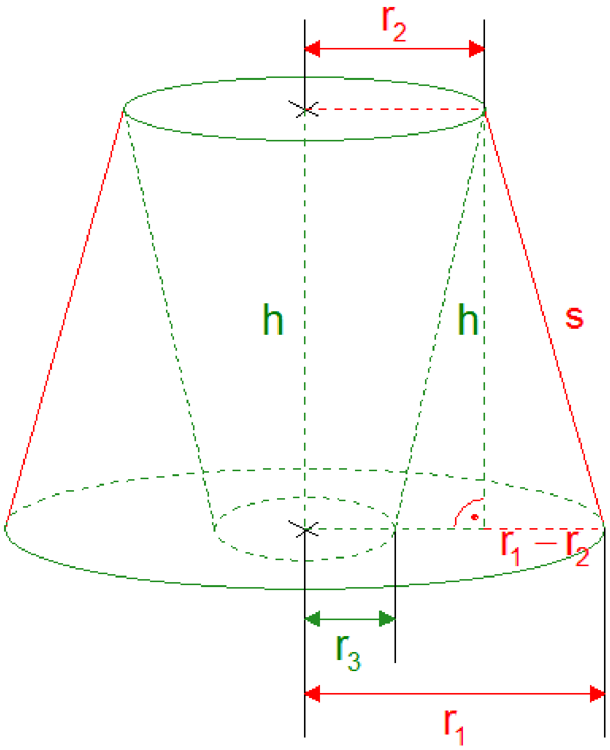
$r_2 = 2e$

$s = 2e\sqrt{5}$

Gesucht:

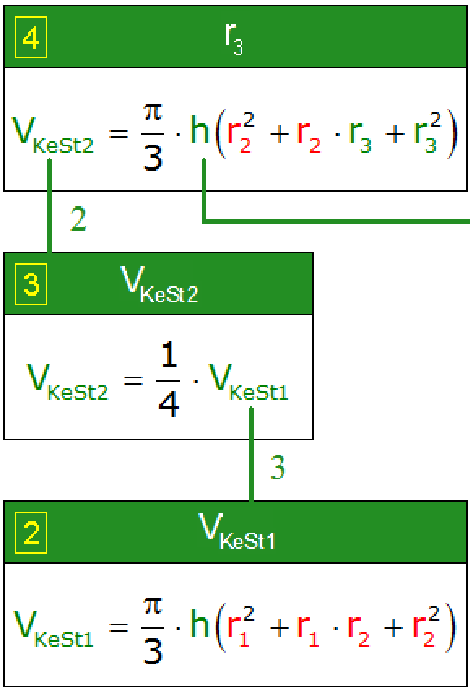
r_3

Skizze:



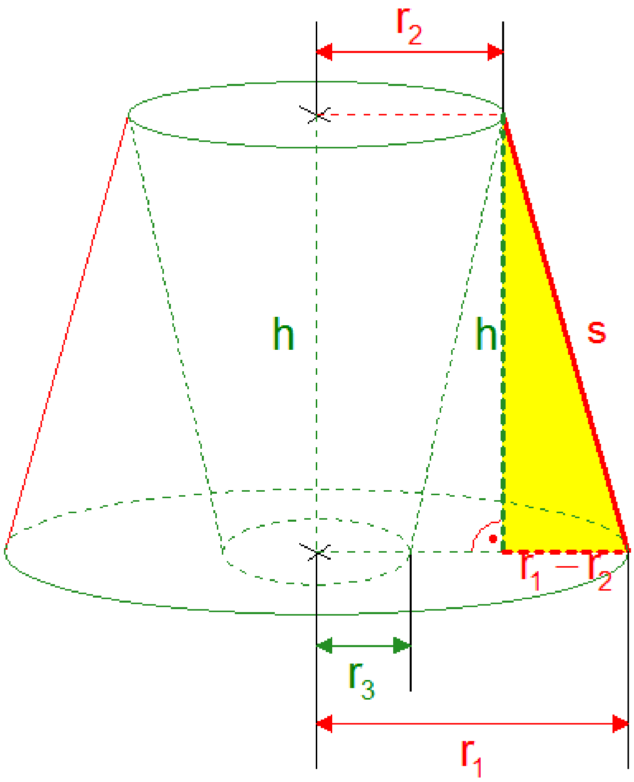
Strategie 1996 W3b:

Struktogramm:



Lösung 1996 W3b:

1. Berechnung der Kegelstumpfhöhe h:



$h^2 + (r_1 - r_2)^2 = s^2$ Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$h^2 + (4e - 2e)^2 = \left(2e\sqrt{5}\right)^2$

$h^2 + (2e)^2 = \left(2e\sqrt{5}\right)^2$ Potenzgesetz: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$h^2 + 2^2 \cdot e^2 = 2^2 \cdot e^2 \cdot \sqrt{5}^2$

$h^2 + 4e^2 = 4 \cdot e^2 \cdot 5$

$h^2 + 4e^2 = 20e^2 \quad \left| -4e^2\right.$

$h^2 = 16e^2 \quad \left| \sqrt{}\right.$

$h = \sqrt{16e^2}$ Wurzelgesetz: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$h = \sqrt{16} \cdot \sqrt{e^2}$

$\underline{h = 4e}$

Lösung 1996 W3b:

2. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{KeSt1}**:**

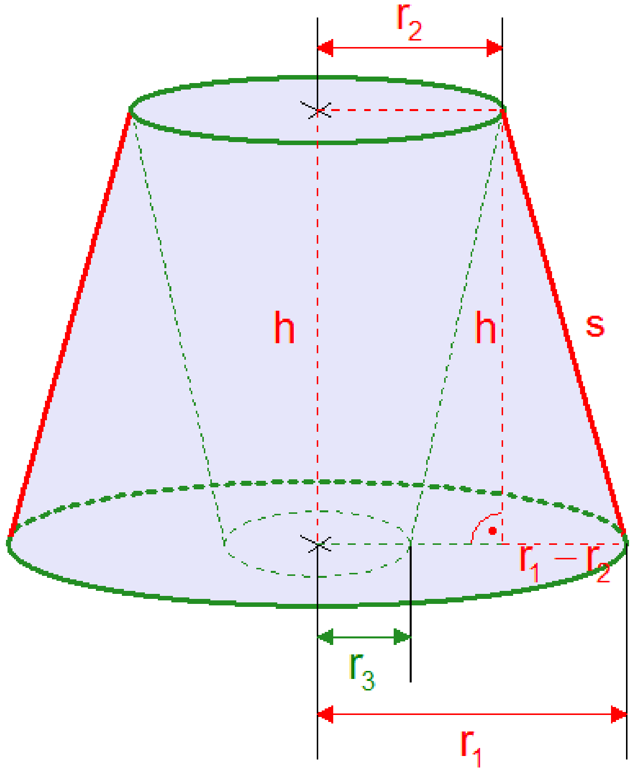
$V_{KeSt1} = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$ Formel Kegelstumpf

$V_{KeSt1} = \frac{\pi}{3} \cdot 4e \cdot \left((4e)^2 + 4e \cdot 2e + (2e)^2\right)$

$V_{KeSt1} = \frac{\pi}{3} \cdot 4e \cdot (16e^2 + 8e^2 + 4e^2)$

$V_{KeSt1} = \frac{\pi}{3} \cdot 4e \cdot 28e^2$

$\underline{V_{KeSt1} = \frac{112}{3} \cdot \pi \cdot e^3}$



3. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{KeSt2}**:**

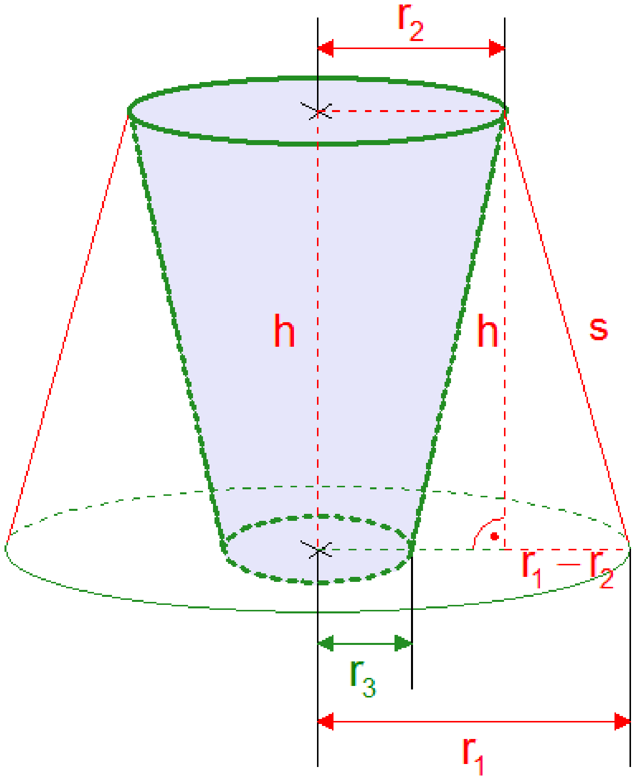
$V_{KeSt2} = \frac{1}{4} \cdot V_{KeSt1}$ $25\% \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{4}$

$V_{KeSt2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{112}{3} \cdot \pi \cdot e^3$

$V_{KeSt2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 28}{3} \cdot \pi \cdot e^3$

$V_{KeSt2} = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4} \cdot 28}{3} \cdot \pi \cdot e^3$ kürzen

$\underline{V_{KeSt2} = \frac{28}{3} \cdot \pi \cdot e^3}$



Lösung 1996 W3b:

4. Berechnung des Kegelstumpf-Radius r_3:

$V_{KeSt2} = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (r_2^2 + r_2 \cdot r_3 + r_3^2)$ Formel Kegelstumpf

$\frac{28}{3} \cdot \pi \cdot e^3 = \frac{\pi}{3} \cdot 4e \cdot ((2e)^2 + 2e \cdot r_3 + r_3^2)$

$\frac{28}{3} \cdot \pi \cdot e^3 = \frac{\pi}{3} \cdot 4e \cdot (4e^2 + 2e \cdot r_3 + r_3^2) \quad |:\pi$

$\frac{28}{3} \cdot e^3 = \frac{1}{3} \cdot 4e \cdot (4e^2 + 2e \cdot r_3 + r_3^2) \quad |\cdot 3$

$28 \cdot e^3 = 4e \cdot (4e^2 + 2e \cdot r_3 + r_3^2) \quad |:4$

$7 \cdot e^3 = e \cdot (4e^2 + 2e \cdot r_3 + r_3^2) \quad |:e$

$7 \cdot e^2 = 4e^2 + 2e \cdot r_3 + r_3^2$ Seiten tauschen

$r_3^2 + 2e \cdot r_3 + 4e^2 = 7 \cdot e^2 \quad |-7e^2$

$r_3^2 + 2e \cdot r_3 - 3e^2 = 0$ Normalform einer quadratischen Gleichung

$r_3^2 + 2er_3 - 3e^2 = 0$

$x^2 + px + q = 0$ p und q bestimmen

$p = 2e$

$q = -3e^2$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ Lösungsformel

$r_{3_{1,2}} = -\frac{2e}{2} \pm \sqrt{\frac{(2e)^2}{4} - (-3e^2)}$

$r_{3_{1,2}} = -e \pm \sqrt{\frac{4e^2}{4} + 3e^2}$

$r_{3_{1,2}} = -e \pm \sqrt{e^2 + 3e^2}$

$r_{3_{1,2}} = -e \pm \sqrt{4e^2}$ Wurzelgesetz: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$r_{3_{1,2}} = -e \pm \sqrt{4} \cdot \sqrt{e^2}$

$r_{3_{1,2}} = -e \pm 2e$

$\underline{r_{3_1}} = -e + 2e = \underline{e}$

$\underline{r_{3_2}} = -e - 2e = \underline{\cancel{-3e}}$ keine Lösung

$\underline{\underline{r_3 = e}}$