

Wahlaufgaben

Aufgabe 1996 W3a:

4 P

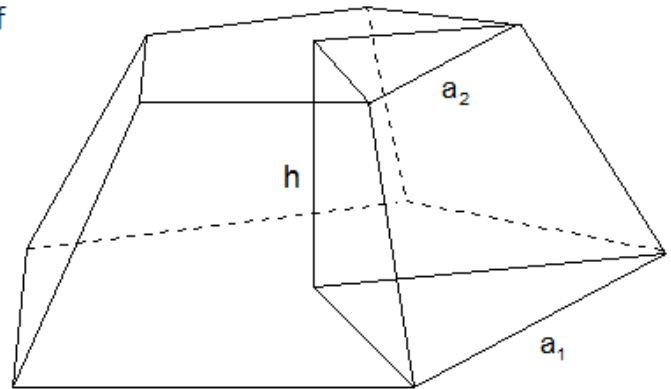
Ein regelmäßiger fünfseitiger Pyramidenstumpf hat die Maße:

$$a_1 = 9,4 \text{ cm}$$

$$a_2 = 6,2 \text{ cm}$$

$$h = 8,7 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Oberfläche des Stumpfes.



Strategie 1996 W3a:

Gegeben:

Regelmäßiger fünfseitiger
Pyramidenstumpf

$$a_1 = 9,4 \text{ cm}$$

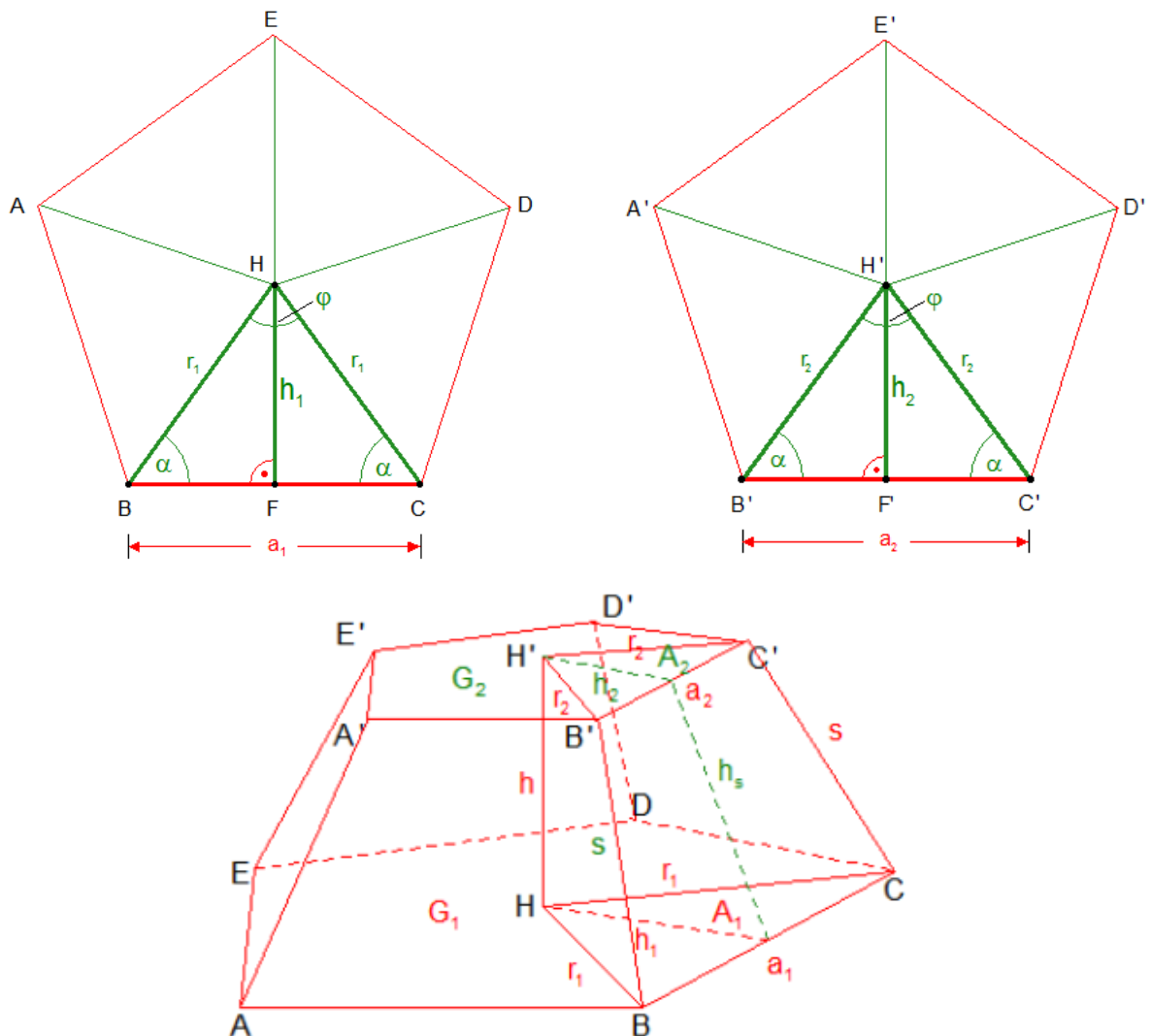
$$a_2 = 6,2 \text{ cm}$$

$$h = 8,7 \text{ cm}$$

Gesucht:

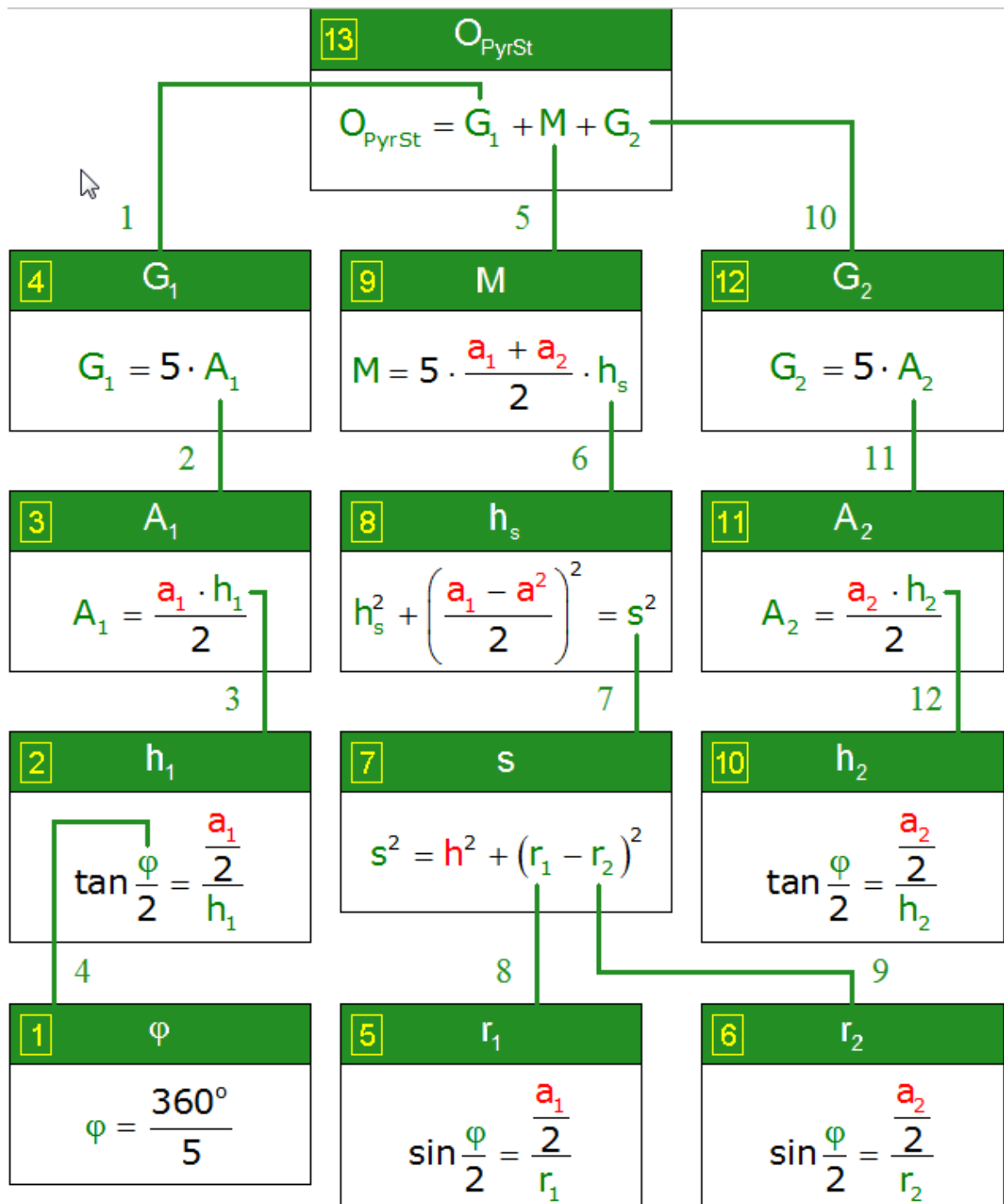
O_{PyrSt}

Skizze:



Strategie 1996 W3a:

Struktogramm:

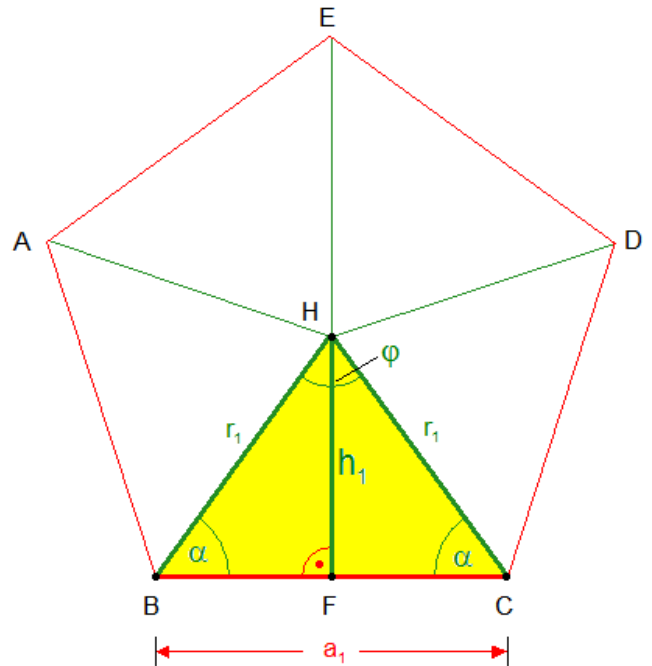


Lösung 1996 W3a:

1. Berechnung des Winkels φ :

$$\varphi = \frac{360^\circ}{5} \quad \begin{array}{l} \text{5 gleichschenklige} \\ \text{Dreiecke am Punkt H} \end{array}$$

$$\underline{\varphi = 72^\circ}$$



2. Berechnung der Dreieckshöhe h_1 :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a_1/2}{h_1} \quad \begin{array}{l} \text{Tangensfunktion im} \\ \text{rechtwinkligen} \\ \text{hellblauen} \\ \text{Teildreieck FCH} \end{array}$$

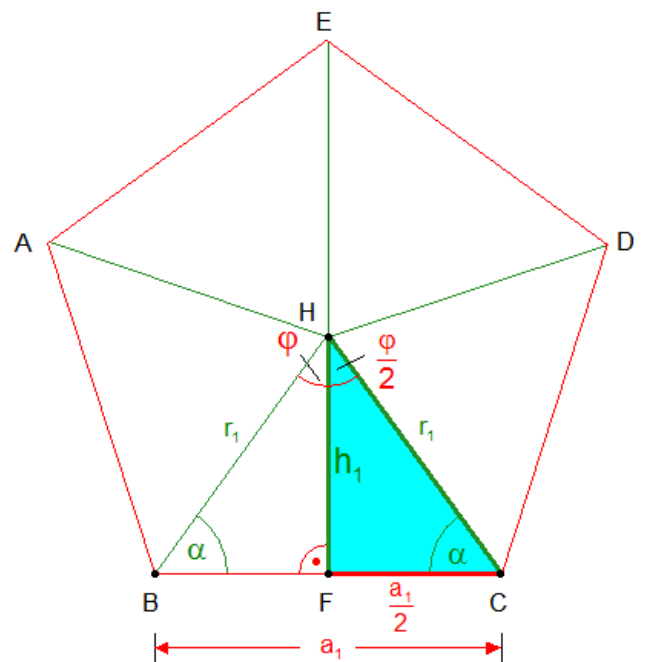
$$\tan \frac{72^\circ}{2} = \frac{9,4}{h_1}$$

$$\tan 36^\circ = \frac{4,7}{h_1}$$

$$0,7265 = \frac{4,7}{h_1} \quad | \cdot h_1$$

$$h_1 \cdot 0,7265 = 4,7 \quad | : 0,7265$$

$$\underline{h_1 = 6,47 \text{ cm}}$$

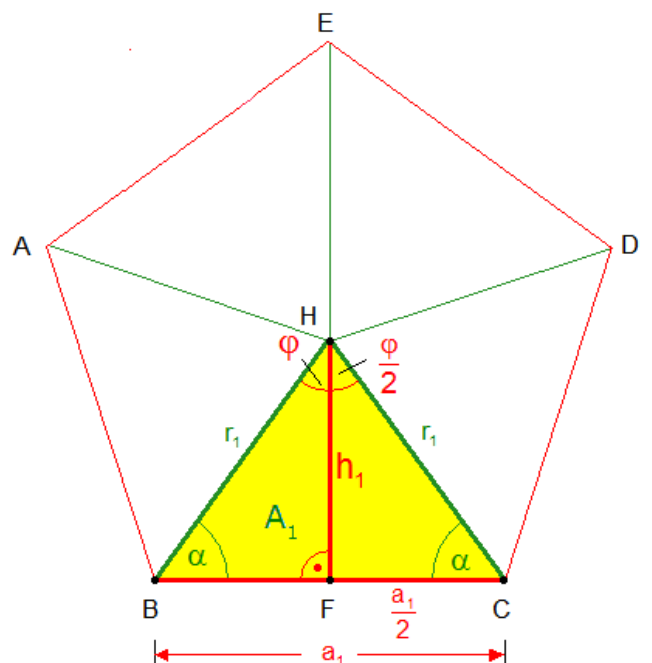


3. Berechnung der Dreiecksfläche A_1 :

$$A_1 = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{a_1 \cdot h_1}{2}$$

$$A_1 = \frac{9,4 \cdot 6,47}{2}$$

$$\underline{A_1 = 30,41 \text{ cm}^2}$$



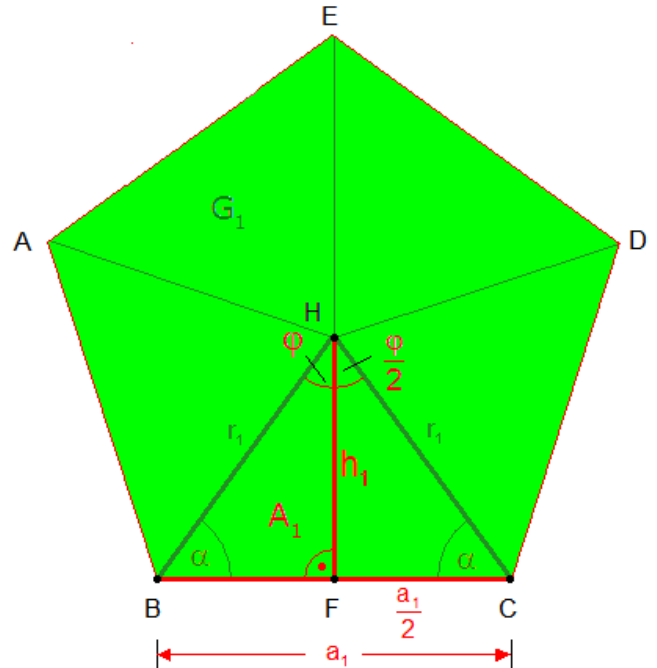
Lösung 1996 W3a:

4. Berechnung der Grundfläche G_1 :

$$G_1 = 5 \cdot A_1$$

$$G_1 = 5 \cdot 30,41 \text{ cm}^2$$

$$\underline{G_1 = 152,05 \text{ cm}^2}$$



5. Berechnung des Radius r_1 :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a_1}{2}}{r_1} \quad \begin{array}{l} \text{Sinusfunktion im} \\ \text{rechtwinkligen} \\ \text{hellblauen} \\ \text{Teildreieck FCH} \end{array}$$

$$\sin \frac{72^\circ}{2} = \frac{9,4}{r_1}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{4,7}{r_1}$$

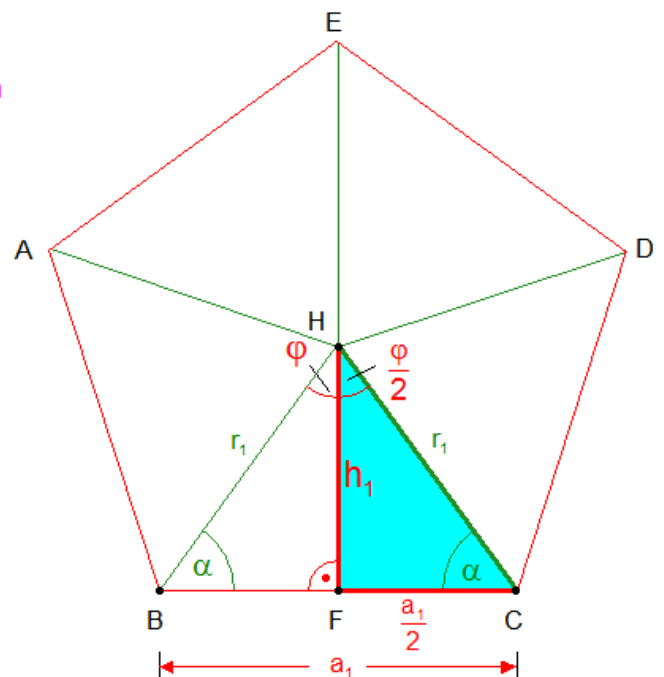
$$0,5878 = \frac{4,7}{r_1}$$

$$r_1 \cdot 0,5878 = 4,7$$

$$\underline{r_1 = 8 \text{ cm}}$$

$$| \cdot r_1$$

$$| : 0,5878$$



Lösung 1996 W3a:

6. Berechnung des Radius r_2 :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a_2}{r_2}$$

Sinusfunktion im rechtwinkligen orangefarbenen Teildreieck $F'C'H'$

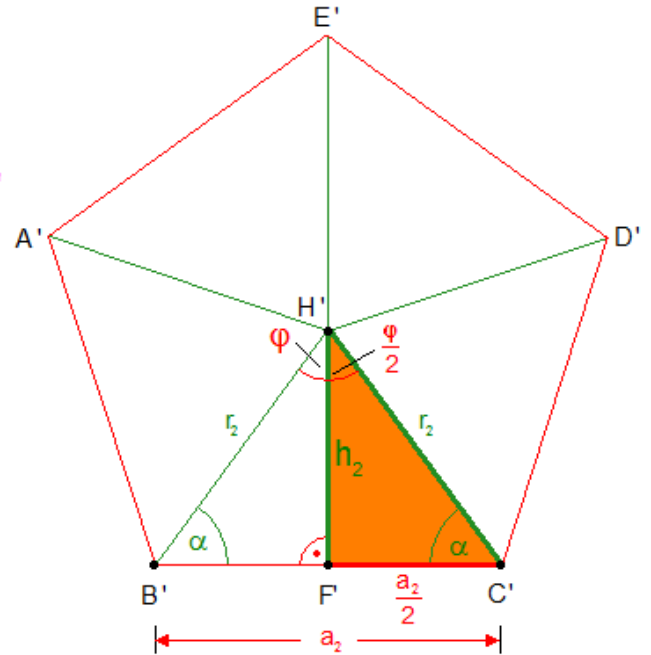
$$\sin \frac{72^\circ}{2} = \frac{6,2}{r_2}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{3,1}{r_2}$$

$$0,5878 = \frac{3,1}{r_2}$$

$$r_2 \cdot 0,5878 = 3,1$$

$$r_2 = 5,27 \text{ cm}$$



7. Berechnung der Seitenkante s :

$$s^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen violetten Teildreieck

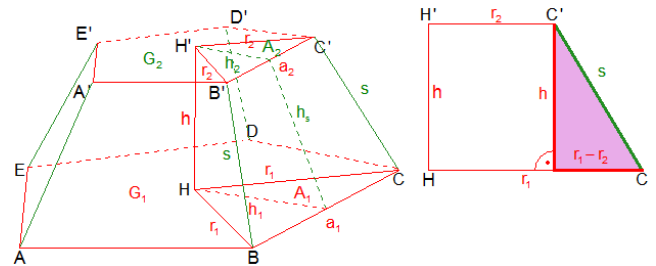
$$s^2 = 8,7^2 + (8 - 5,27)^2$$

$$s^2 = 8,7^2 + 2,73^2$$

$$s^2 = 75,69 + 7,45$$

$$s^2 = 83,14$$

$$s = 9,12 \text{ cm}$$



8. Berechnung der Höhe der Seitenfläche h_s :

$$h_s^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 = s^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen violetten Teildreieck

$$h_s^2 + \left(\frac{9,4 - 6,2}{2} \right)^2 = 9,12^2$$

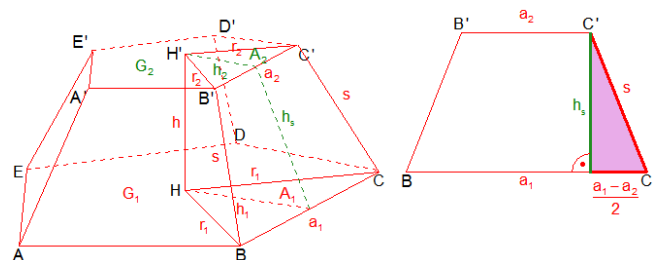
$$h_s^2 + \left(\frac{3,2}{2} \right)^2 = 9,12^2$$

$$h_s^2 + 1,6^2 = 9,12^2$$

$$h_s^2 + 2,56 = 83,17$$

$$h_s^2 = 80,61$$

$$h_s = 8,98 \text{ cm}$$



Lösung 1996 W3a:

9. Berechnung des Pyramidenstumpf-Mantels M :

$$M = 5 \cdot m \cdot h_s \quad \text{Trapezflächenformel}$$

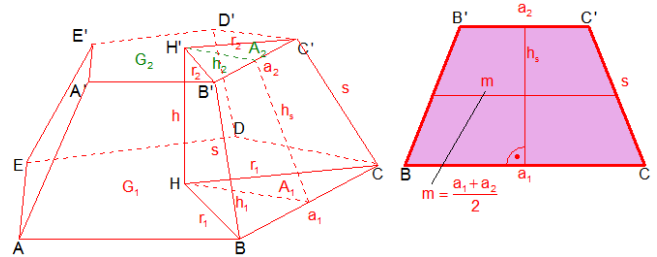
$$M = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s$$

$$M = 5 \cdot \frac{9,4 + 6,2}{2} \cdot 8,98$$

$$M = 5 \cdot \frac{15,6}{2} \cdot 8,98$$

$$M = 5 \cdot 7,8 \cdot 8,98$$

$$M = 350,22 \text{ cm}^2$$



10. Berechnung der Dreieckshöhe h_2 :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a_2}{h_2} \quad \text{Tangensfunktion im rechtwinkligen orangefarbenen Teildreieck F'C'H'}$$

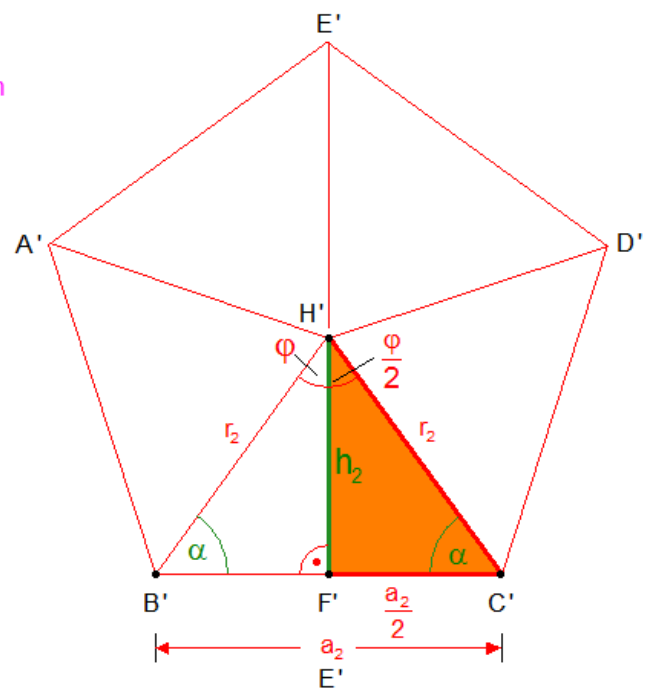
$$\tan \frac{72^\circ}{2} = \frac{6,2}{h_2}$$

$$\tan 36^\circ = \frac{3,1}{h_2}$$

$$0,7265 = \frac{3,1}{h_2} \quad | \cdot h_2$$

$$h_2 \cdot 0,7265 = 3,1 \quad | : 0,7265$$

$$h_2 = 4,27 \text{ cm}$$

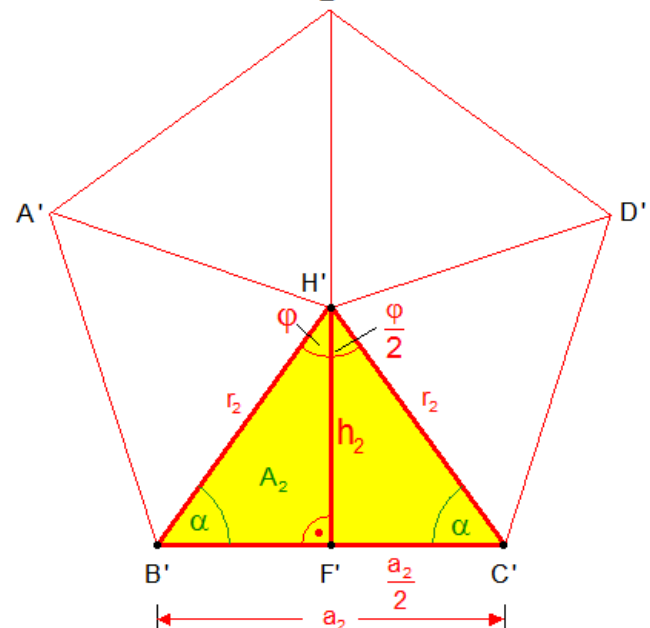


11. Berechnung der Dreiecksfläche A_2 :

$$A_2 = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{a_2 \cdot h_2}{2}$$

$$A_2 = \frac{6,2 \cdot 4,27}{2}$$

$$A_2 = 13,24 \text{ cm}^2$$



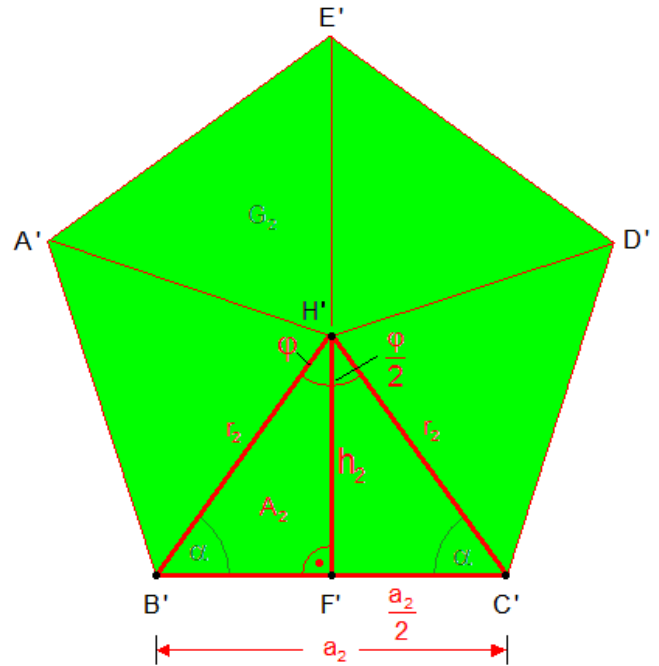
Lösung 1996 W3a:

12. Berechnung der Deckfläche G_2 :

$$G_2 = 5 \cdot A_2$$

$$G_2 = 5 \cdot 13,24$$

$$\underline{\underline{G_2 = 66,2 \text{ cm}^2}}$$



13. Berechnung der Oberfläche des Pyramidenstumpfes O_{PyrSt} :

$$O_{\text{PyrSt}} = G_1 + M + G_2$$

$$O_{\text{PyrSt}} = 152,05 + 350,22 + 66,2$$

$$\underline{\underline{O_{\text{PyrSt}} = 568,47 \text{ cm}^2}}$$

