Aufgabe 1995 3c: **3 P**

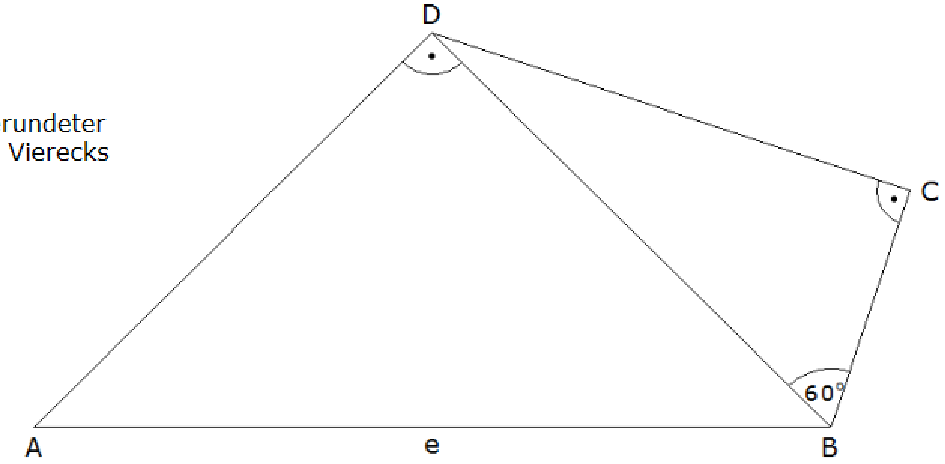
In nebenstehender Figur gilt:

$\overline{AD} = \overline{BD}$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, daß sich der Umfang des Vierecks ABCD nach der Formel

$$u = \frac{e}{4} \cdot \left(4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

berechnen läßt.



Strategie 1995 3c:

Gegeben:

$\overline{AD} = \overline{BD}$

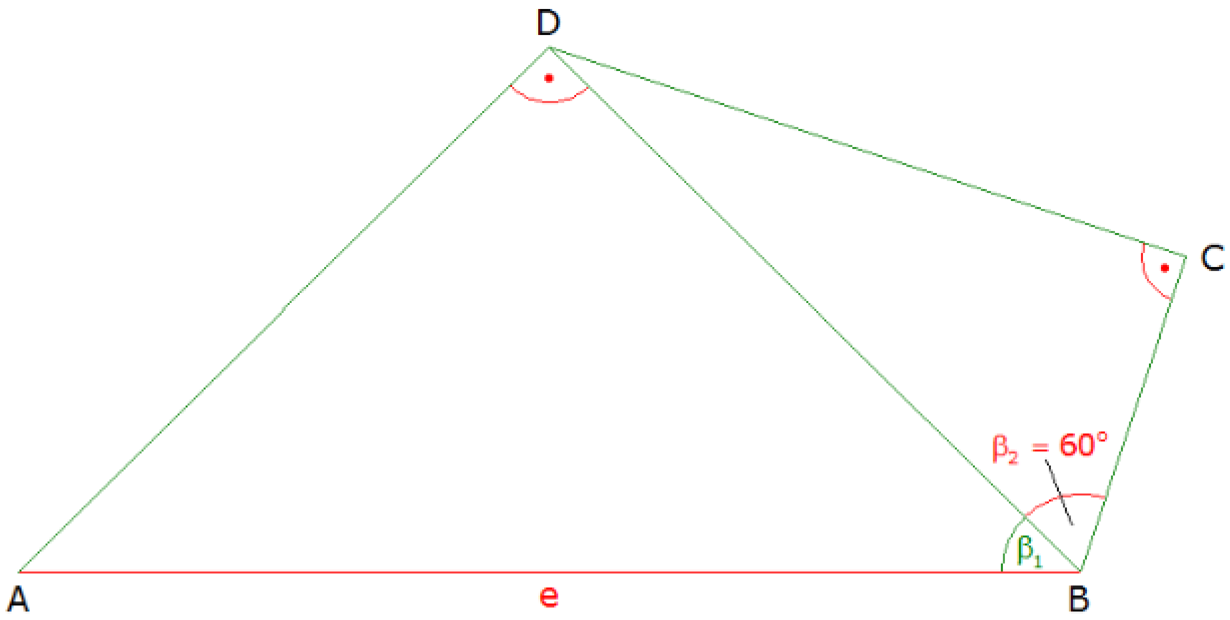
$\overline{AB} = e$

$\beta_2 = 60°$

Gesucht:

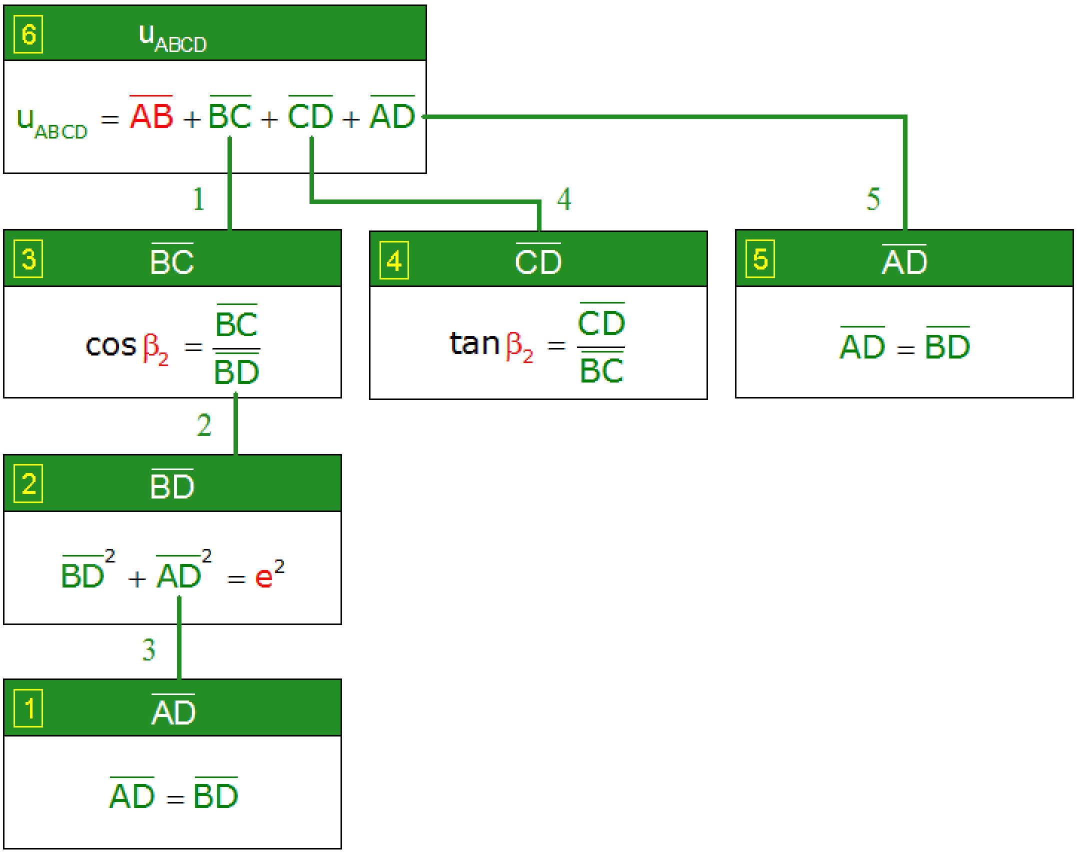
$$u = \frac{e}{4} \cdot \left(4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

Skizze:



Strategie 1995 3c:

Struktogramm:

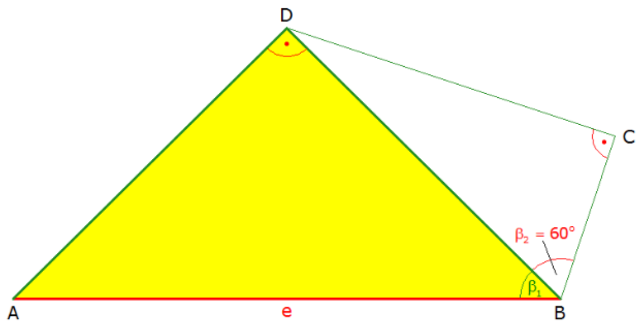


Lösung 1995 3c:

1. Berechnung der Strecke $\overline{AD}$:

$\overline{AD} = \overline{BD}$ siehe Aufgabenstellung

$\overline{AD} = \overline{BD}$



2. Berechnung der Strecke $\overline{BD}$:

$\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 = e^2$ Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck

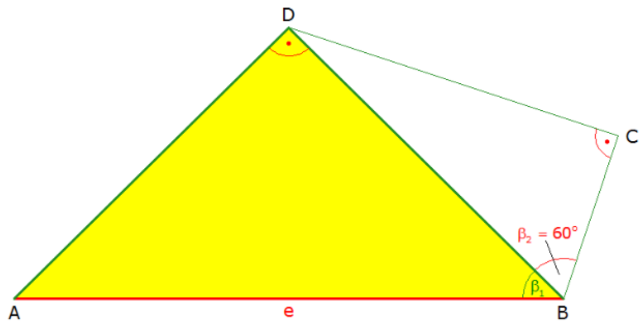
$\overline{BD}^2 + \overline{BD}^2 = e^2$

$2 \cdot \overline{BD}^2 = e^2 \quad |:2$

$\overline{BD}^2 = \frac{e^2}{2} \quad |\sqrt{\ }$

$\overline{BD} = \sqrt{\frac{e^2}{2}}$ Wurzelgesetz: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$\overline{BD} = \frac{\sqrt{e^2}}{\sqrt{2}}$



Lösung 1995 3c:

$$\overline{BD} = \frac{e}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{BD} = \frac{e \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$ Nenner rational machen

$$\overline{BD} = \frac{e \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$\overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2}$$

3. Berechnung der Strecke $\overline{BC}$:

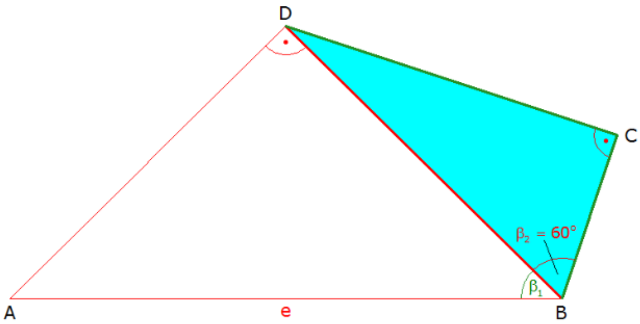
$$\cos\beta_2 = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$ Kosinusfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck BCD

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2}}$$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2}}$$ Seiten tauschen

$$\frac{\overline{BC}}{\frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \qquad \left| \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2} \right.$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2}$$



4. Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

$$\tan\beta_2 = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$$ Tangensfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck BCD

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{CD}}{\frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2}}$$ $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

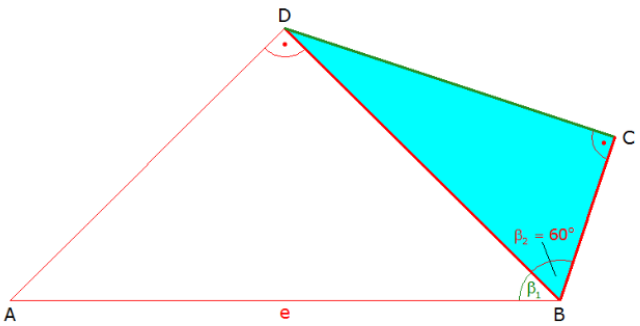
$$\sqrt{3} = \frac{\overline{CD}}{\frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2}}$$ Seiten tauschen

$$\frac{\overline{CD}}{\frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{3} \qquad \left| \cdot \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2} \right.$$

$$\overline{CD} = \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$$ Wurzelgesetz: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

$$\overline{CD} = \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$\overline{CD} = \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{6}$$

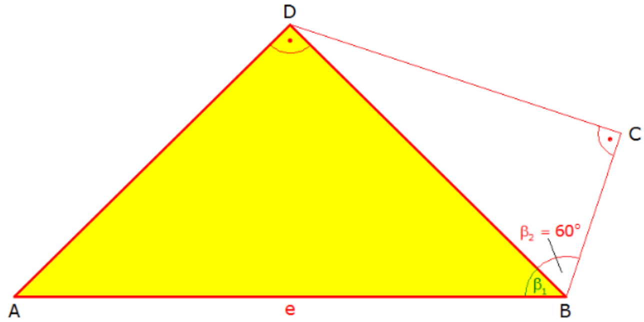


Lösung 1995 3c:

5. Berechnung der Strecke $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \overline{BD}$$

$$\overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2}$$



6. Berechnung des Umfangs u_{ABCD}:

$$u_{ABCD} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$$

$$u_{ABCD} = e + \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2}$$

$$u_{ABCD} = e + \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{6} + \frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2}$$ Zusammenfassen

$$u_{ABCD} = e + \frac{3}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot e \cdot \sqrt{6}$$

$$u_{ABCD} = 4 \cdot \frac{e}{4} + 3 \cdot \frac{e}{4} \cdot \sqrt{2} + \frac{e}{4} \cdot \sqrt{6}$$

$$u_{ABCD} = 4 \cdot \frac{e}{4} + 3 \cdot \frac{e}{4} \cdot \sqrt{2} + \frac{e}{4} \cdot \sqrt{6}$$ gemeinsamen Faktor ausklammern

$$u_{ABCD} = \frac{e}{4}\left(4 + 3 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$

$$u_{ABCD} = \frac{e}{4}\left(4 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)$$