Aufgabe 1995 1b: **4 P**

Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide wird parallel zur Grundfläche geschnitten.
Der Pyramidenstumpf hat die Maße:

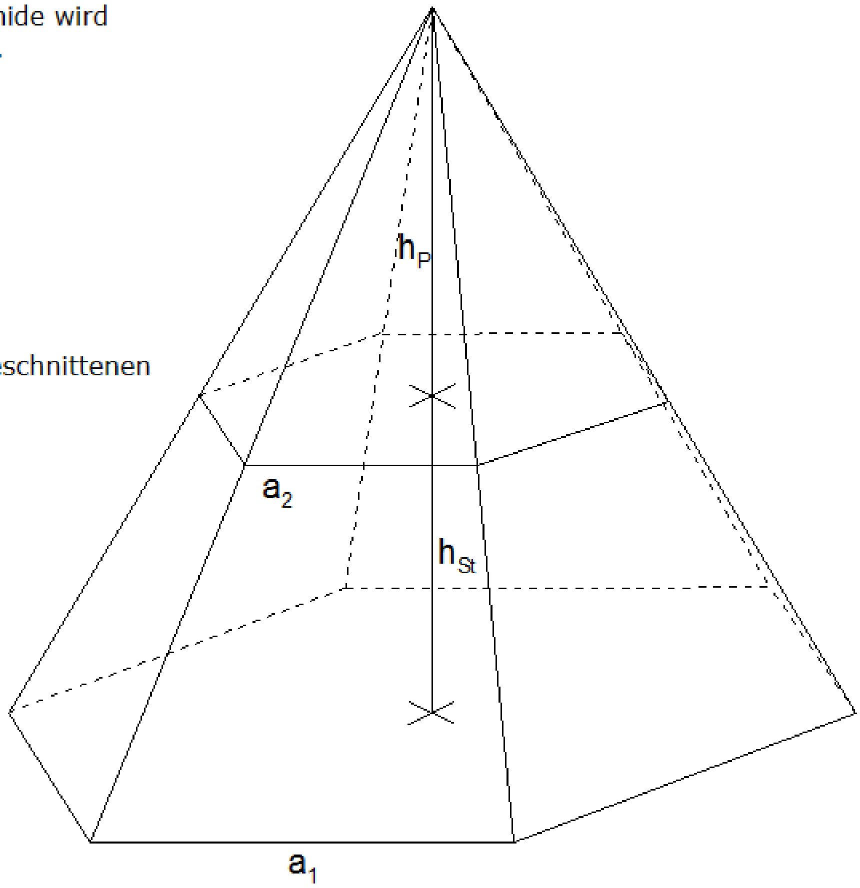
$a_1 = 8,8\,\text{cm}$

$a_2 = 5,4\,\text{cm}$

$h_{St} = 10,6\,\text{cm}$

Wie groß ist die Mantelfläche des Pyramidenstumpfes?

Berechnen Sie die Höhe h_P der abgeschnittenen Pyramide und deren Volumen.



Strategie 1995 1b:

Gegeben:

Regelmäßige sechsseitige Pyramide

$a_1 = 8,8\,\text{cm}$

$a_2 = 5,4\,\text{cm}$

$h_{St} = 10,6\,\text{cm}$

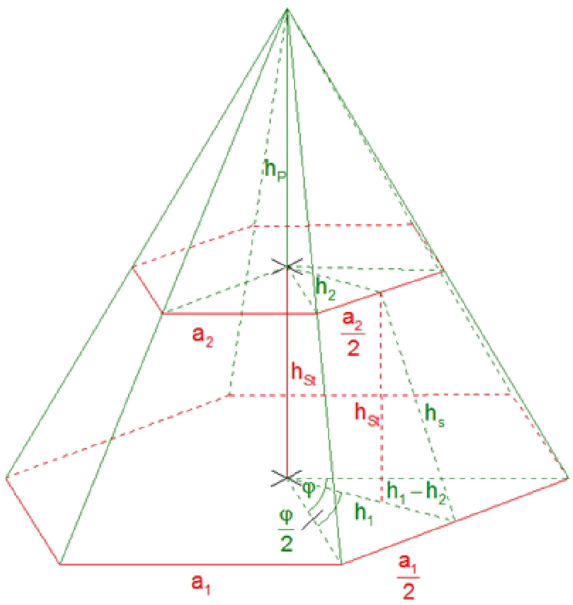
Gesucht:

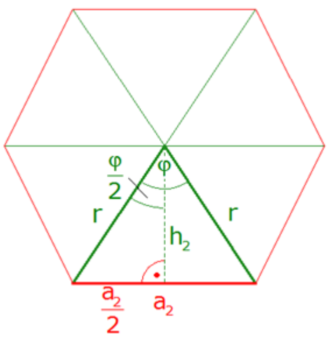
M_{PyrSt}

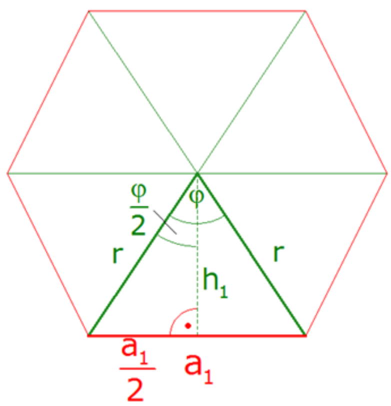
h_P

V_{Pyr}

Skizze:

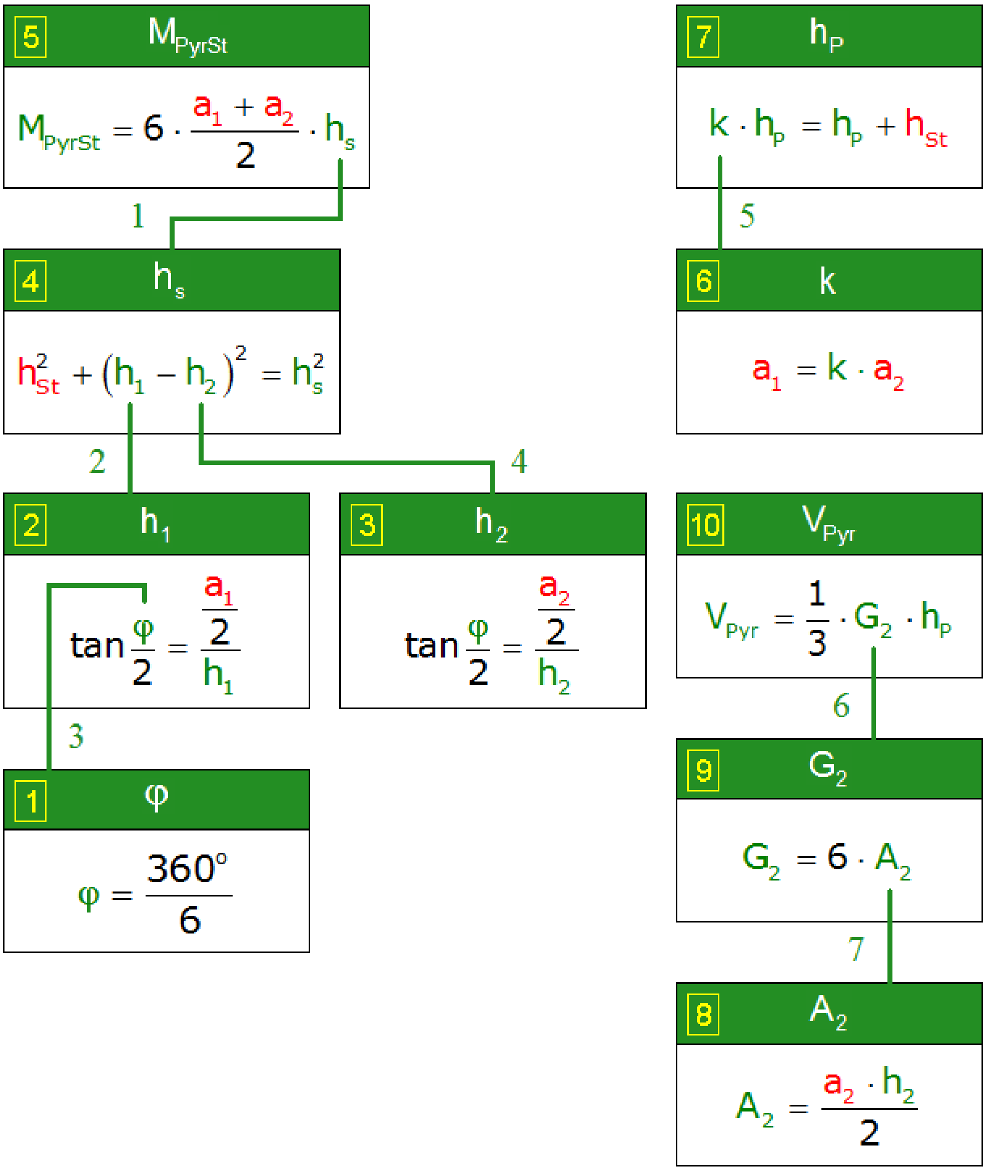






Strategie 1995 1b:

Struktogramm:

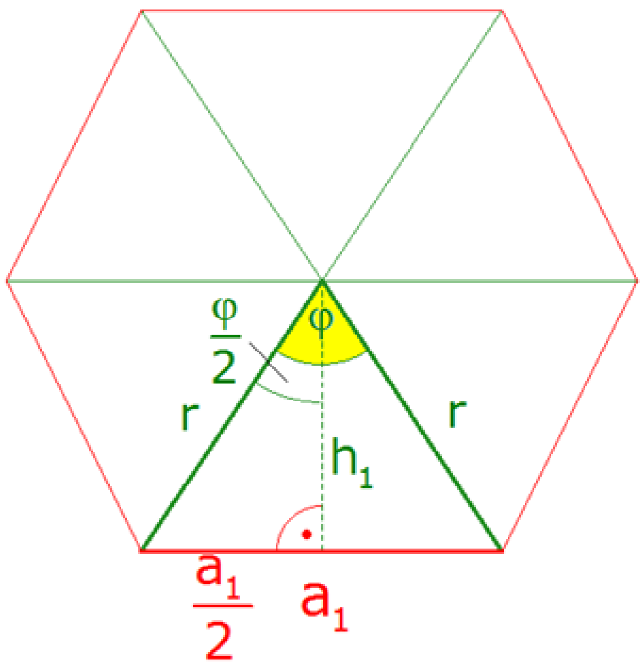


Lösung 1995 1b:

1. Berechnung des Winkels φ:

$$\varphi = \frac{360°}{6}$$

$$\underline{\varphi = 60^0}$$



Lösung 1995 1b:

2. Berechnung der Dreieckshöhe h_1:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{a_1}{2}}{h_1}$$ Tangensfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

$$\tan\frac{60^\circ}{2} = \frac{\frac{8,8}{2}}{h_1}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{4,4}{h_1}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{4,4}{h_1} \qquad \Big|\cdot h_1$$

$$h_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = 4,4 \qquad \Big|\cdot 3$$

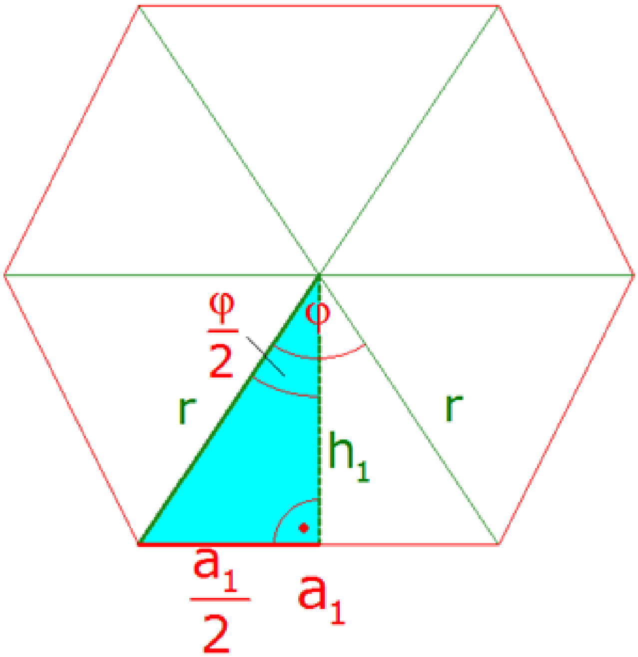
$$h_1\cdot\sqrt{3} = 13,2 \qquad \Big|:\sqrt{3}$$

$$h_1 = \frac{13,2}{\sqrt{3}}$$

$$h_1 = \frac{13,2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$ Nenner rational machen

$$h_1 = \frac{13,2\cdot\sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{h_1 = 4,4\cdot\sqrt{3}\,\text{cm}}$$



3. Berechnung der Dreieckshöhe h_2:

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{a_2}{2}}{h_2}$$ Tangensfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

$$\tan\frac{60^\circ}{2} = \frac{\frac{5,4}{2}}{h_2}$$

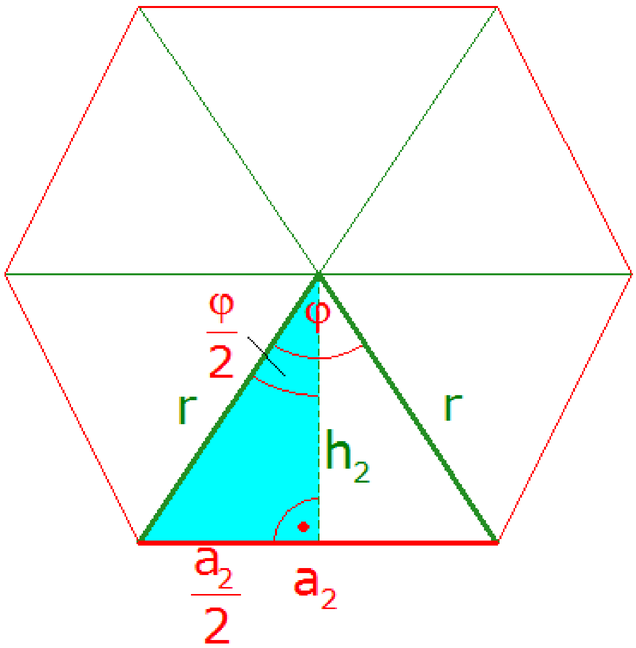
$$\tan 30^\circ = \frac{2,7}{h_2}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{2,7}{h_2} \qquad \Big|\cdot h_2$$

$$h_2\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = 2,7 \qquad \Big|\cdot 3$$

$$h_2\cdot\sqrt{3} = 8,1 \qquad \Big|:\sqrt{3}$$

$$h_2 = \frac{8,1}{\sqrt{3}}$$



Lösung 1995 1b:

$$h_2 = \frac{8{,}1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

Nenner rational machen

$$h_2 = \frac{8{,}1 \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{h_2 = 2{,}7 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}}$$

4. Berechnung der Höhe der Pyramidenstumpf-Seitenfläche h_s:

$$h_{St}^2 + (h_1 - h_2)^2 = h_s^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen grünen Teildreieck

$$10{,}6^2 + \left(4{,}4 \cdot \sqrt{3} - 2{,}7 \cdot \sqrt{3}\right)^2 = h_s^2$$

$$10{,}6^2 + \left(1{,}7 \cdot \sqrt{3}\right)^2 = h_s^2$$

Potenzgesetz: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$$10{,}6^2 + 1{,}7^2 \cdot \sqrt{3}^2 = h_s^2$$

$$112{,}36 + 2{,}89 \cdot 3 = h_s^2$$

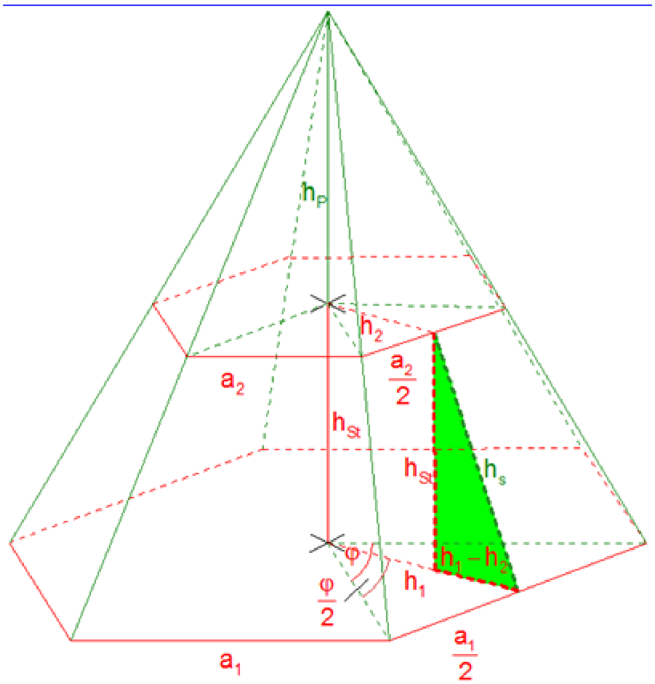
Seiten tauschen

$$h_s^2 = 112{,}36 + 2{,}89 \cdot 3$$

$$h_s^2 = 112{,}36 + 8{,}67$$

$$h_s^2 = 121{,}03 \qquad \left|\sqrt{\ }\right.$$

$$\underline{h_s = 11\,\text{cm}}$$



5. Berechnung des Pyramidenstumpf-Mantels M_{PyrSt}:

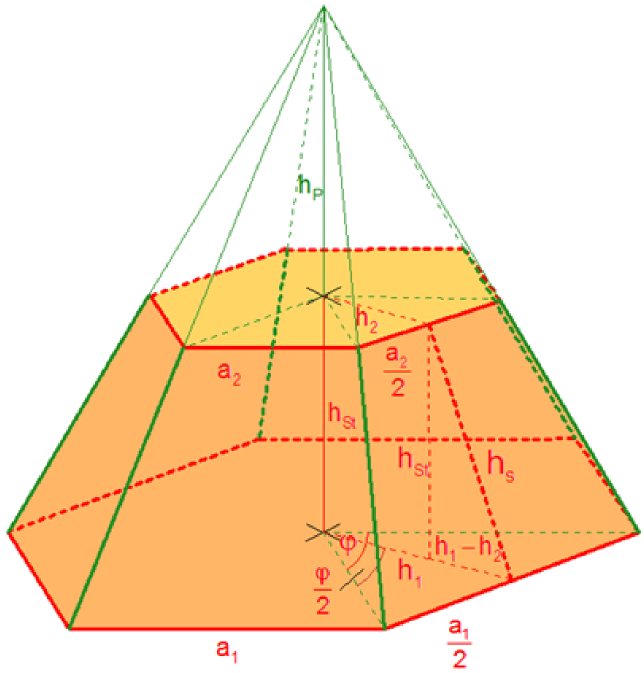
$$M_{PyrSt} = 6 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s$$

$$M_{PyrSt} = 6 \cdot \frac{8{,}8 + 5{,}4}{2} \cdot 11$$

$$M_{PyrSt} = 6 \cdot \frac{14{,}2}{2} \cdot 11$$

$$M_{PyrSt} = 6 \cdot 7{,}1 \cdot 11$$

$$\underline{\underline{M_{PyrSt} = 468{,}6\,\text{cm}^2}}$$



Lösung 1995 1b:

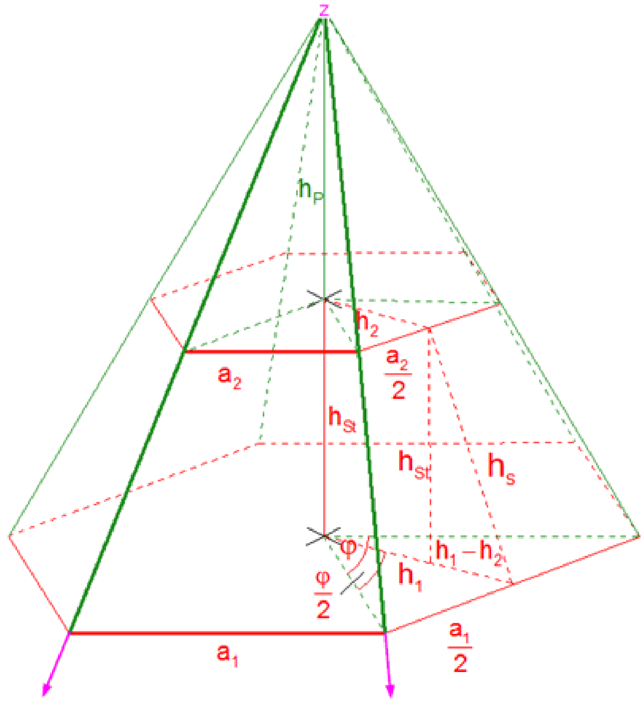
6. Berechnung des Streckfaktors k:

$a_1 = k \cdot a_2$ Streckung mit Zentrum Z

$8,8 = k \cdot 5,4$ Seiten tauschen

$k \cdot 5,4 = 8,8 \quad |:5,4$

$\underline{k = 1,63}$



7. Berechnung der Pyramidenhöhe h_P:

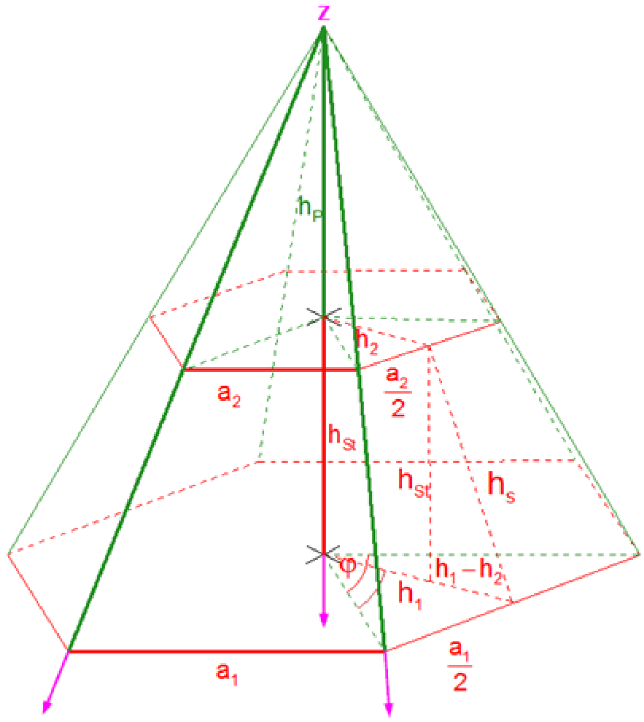
$h_P \cdot k = h_P + h_{St}$ Streckung mit Zentrum Z

$h_P \cdot 1,63 = h_P + 10,6$

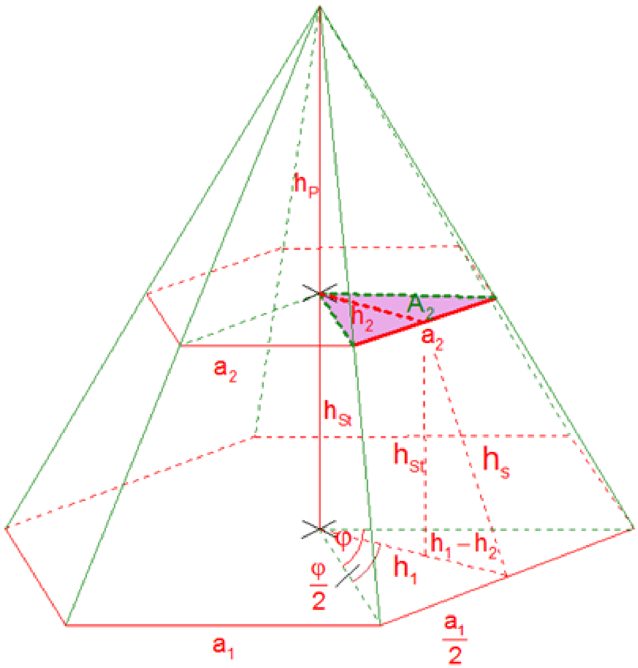
$1,63 h_P = h_P + 10,6 \quad |-h_P$

$0,63 h_P = 10,6 \quad |:0,63$

$\underline{h_P = 16,8\,cm}$



Lösung 1995 1b:



8. Berechnung der Dreiecksfläche A_2:

$$A_2 = \frac{a_2 \cdot h_2}{2}$$ Formel Dreiecksfläche

$$A_2 = \frac{5,4 \cdot 2,7 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

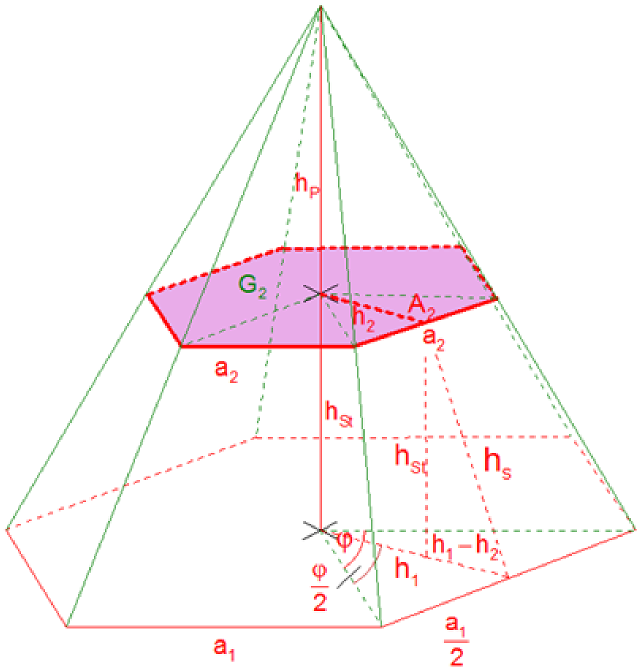
$$\underline{A_2 = 12,63\,cm^2}$$

9. Berechnung des Pyramidengrundfläche G_2 :

$$G_2 = 6 \cdot A_2$$

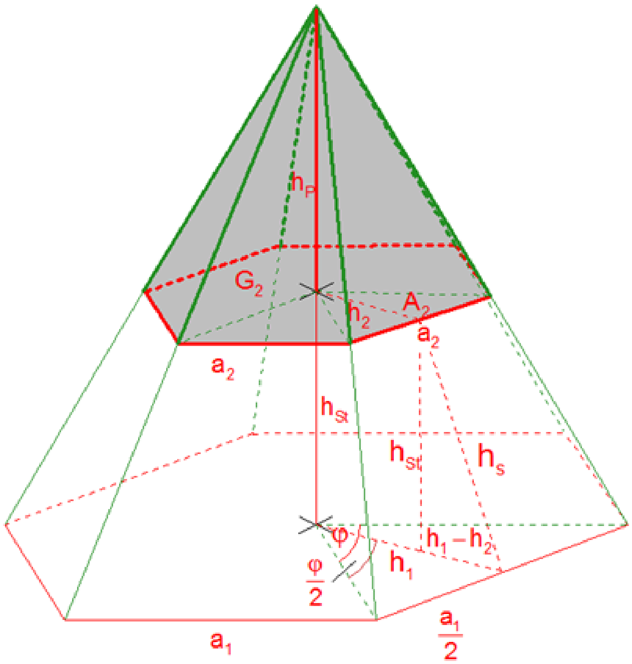
$$G_2 = 6 \cdot 12,63$$

$$\underline{G_2 = 75,76\,cm^2}$$



Lösung 1995 1b:

10. Berechnung des Pyramidenvolumens V_{Pyr} :



$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h_P$$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 75,76 \cdot 16,8$$

$$\underline{\underline{V_{Pyr} = 424,26\,cm^3}}$$