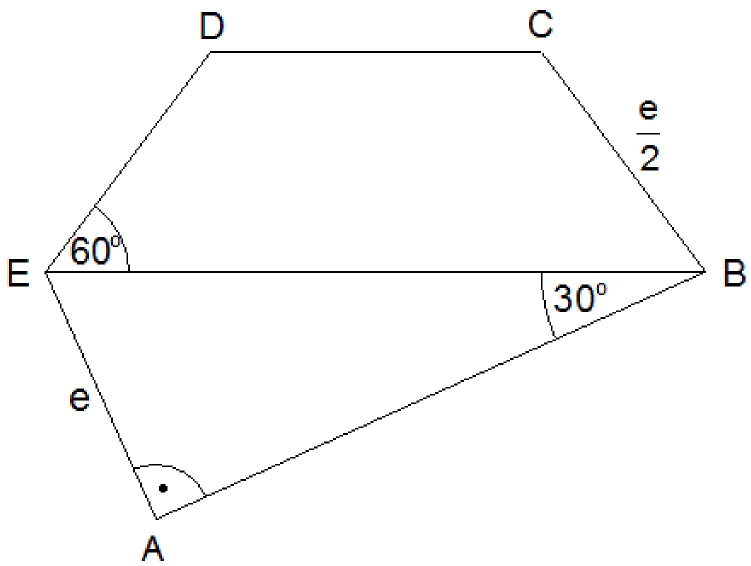
Aufgabe 1994 4c: **3 P**

Das nebenstehende Fünfeck setzt sich zusammen aus einem gleichschenkligen Trapez und einem rechtwinkligen Dreieck.
Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, daß sich der Flächeninhalt des Fünfecks nach der Formel

$$A = \frac{15}{16} e^2 \sqrt{3}$$

berechnen läßt.



Strategie 1994 4c:

Gegeben:

gleichschenkliges Trapez +
rechtwinkliges Dreieck

$\overline{AE} = e$

$\overline{DE} = \overline{BC} = \frac{e}{2}$

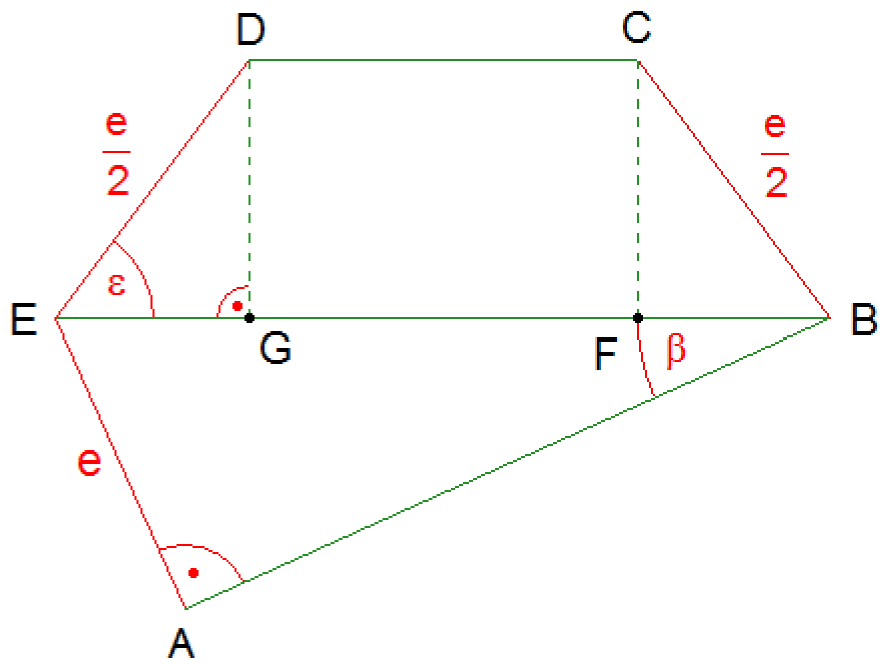
$\beta = 30°$

$\varepsilon = 60°$

Gesucht:

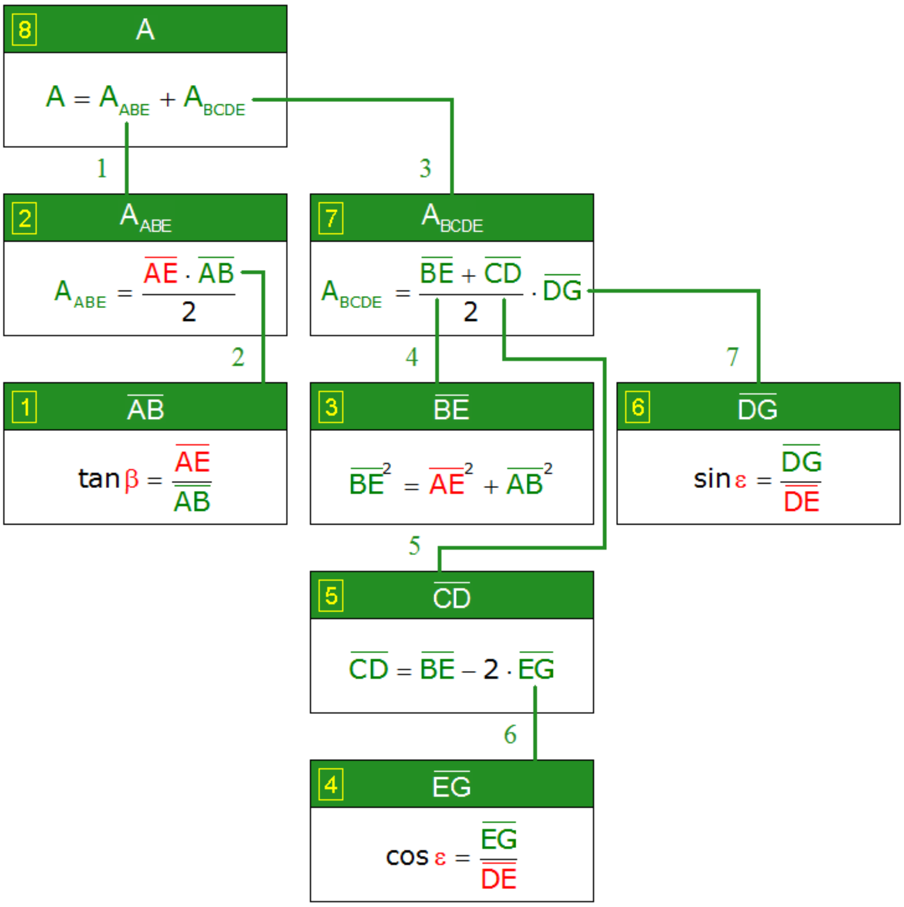
$A = \frac{15}{16} e^2 \sqrt{3}$

Skizze:



Strategie 1994 4c:

Struktogramm:



Lösung 1994 4c:

1. Berechnung der Strecke $\overline{AB}$:

$\tan\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$ Tangensfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck ABE

$\tan 30^\circ = \frac{e}{\overline{AB}}$ $\qquad \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\frac{1}{3}\sqrt{3} = \frac{e}{\overline{AB}} \qquad | \cdot \overline{AB}$

$\overline{AB} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{3} = e \qquad | \cdot 3$

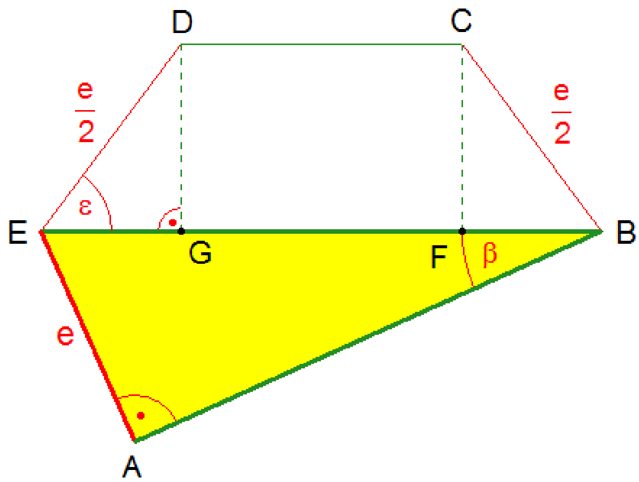
$\overline{AB}\sqrt{3} = 3e \qquad | : \sqrt{3}$

$\overline{AB} = \frac{3e}{\sqrt{3}}$

$\overline{AB} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$ Nenner rational machen

$\overline{AB} = \frac{3e \cdot \sqrt{3}}{3}$

$\underline{\overline{AB} = e\sqrt{3}}$



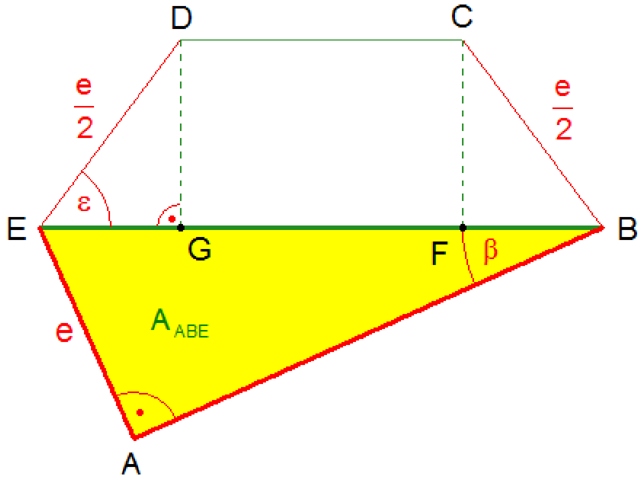
Lösung 1994 4c:

2. Berechnung der Dreiecksfläche A_{ABE}:

$$A_{ABE} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AB}}{2}$$

$$A_{ABE} = \frac{e \cdot e\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{ABE} = \frac{1}{2} e^2 \sqrt{3}$$



3. Berechnung der Strecke $\overline{BE}$:

$$\overline{BE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2$$

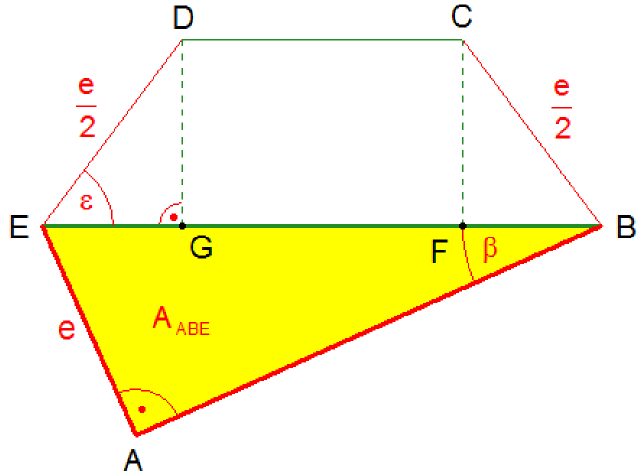
Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck ABE

$$\overline{BE}^2 = e^2 + \left(e\sqrt{3}\right)^2$$

$$\overline{BE}^2 = e^2 + 3e^2$$

$$\overline{BE}^2 = 4e^2 \qquad \Big| \sqrt{\ }$$

$$\overline{BE} = 2e$$



4. Berechnung der Strecke $\overline{EG}$:

$$\cos\varepsilon = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{DE}}$$

Kosinusfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck DEG

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{EG}}{\frac{e}{2}}$$

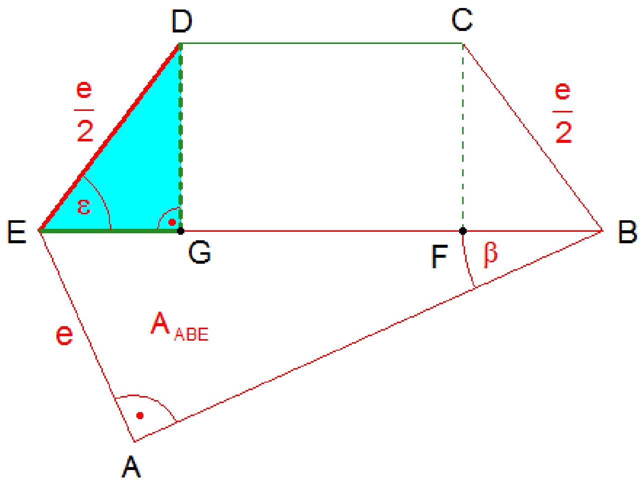
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\overline{EG}}{\frac{e}{2}}$$

Seiten tauschen

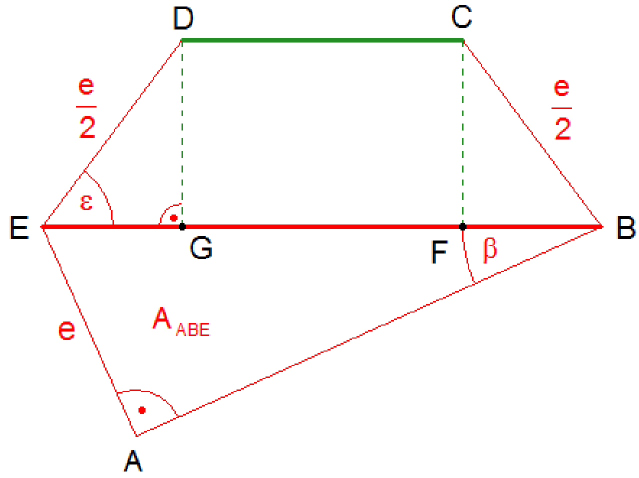
$$\frac{\overline{EG}}{\frac{e}{2}} = \frac{1}{2} \qquad \Big| \cdot \frac{e}{2}$$

$$\overline{EG} = \frac{e}{4}$$



Lösung 1994 4c:

5. Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:



$$\overline{CD} = \overline{BE} - 2 \cdot \overline{EG}$$

$$\overline{CD} = 2e - 2 \cdot \frac{e}{4}$$

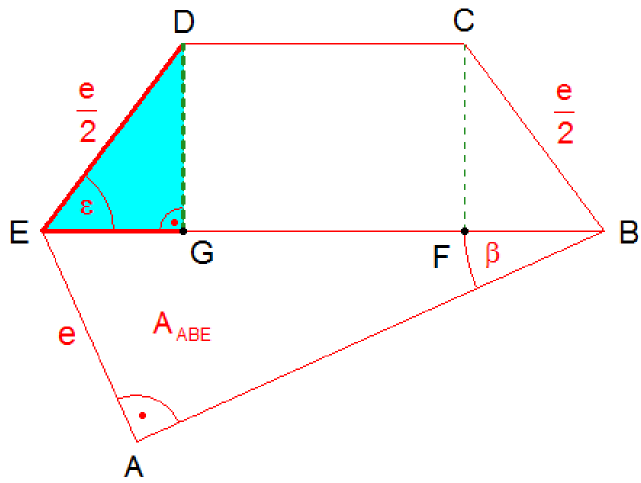
$$\overline{CD} = 2e - \frac{e}{2}$$

$$\overline{CD} = \frac{4e}{2} - \frac{e}{2}$$

$$\underline{\overline{CD} = \frac{3e}{2}}$$

6. Berechnung der Strecke $\overline{DG}$:

$$\sin\varepsilon = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}}$$ Sinusfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck DEG



$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{DG}}{\frac{e}{2}}$$ $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{\overline{DG}}{\frac{e}{2}}$$ Seiten tauschen

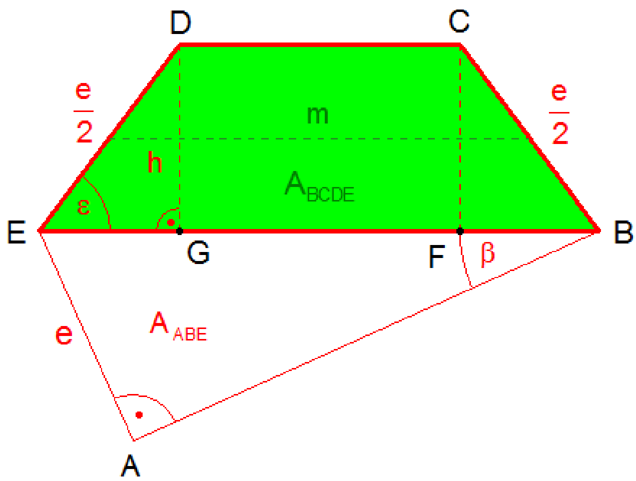
$$\frac{\overline{DG}}{\frac{e}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \Big|\cdot\frac{e}{2}$$

$$\overline{DG} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e}{2}\sqrt{3}$$

$$\underline{\overline{DG} = \frac{e}{4}\sqrt{3}}$$

7. Berechnung der Trapezfläche A_{BCDE}:

$$A_{BCDE} = m \cdot h$$ Flächenformel Trapez



$$A_{BCDE} = \frac{\overline{BE} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{DG}$$

$$A_{BCDE} = \frac{2e + 1,5e}{2} \cdot \frac{e}{4}\sqrt{3}$$

$$A_{BCDE} = \frac{3,5e}{2} \cdot \frac{e}{4}\sqrt{3}$$

$$A_{BCDE} = \frac{3,5}{8} e^2\sqrt{3}$$

$$\underline{A_{BCDE} = \frac{7}{16} e^2\sqrt{3}}$$

Lösung 1994 4c:

8. Berechnung der Gesamtfläche A:

$$A = A_{ABE} + A_{BCDE}$$

$$A = \frac{1}{2}e^2\sqrt{3} + \frac{7}{16}e^2\sqrt{3}$$

$$A = e^2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{7}{16}\right)$$

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{7}{16}\right)e^2\sqrt{3}$$

$$A = \left(\frac{8}{16} + \frac{7}{16}\right)e^2\sqrt{3}$$

$$A = \frac{15}{16}e^2\sqrt{3}$$