

Aufgabe 1994 1b:

4 P

Holzmodelle haben die Form quadratischer Pyramidenstümpfe.

Beim Modell II ist eine Pyramide herausgearbeitet. Sie hat die halbe Höhe des Pyramidenstumpfes.

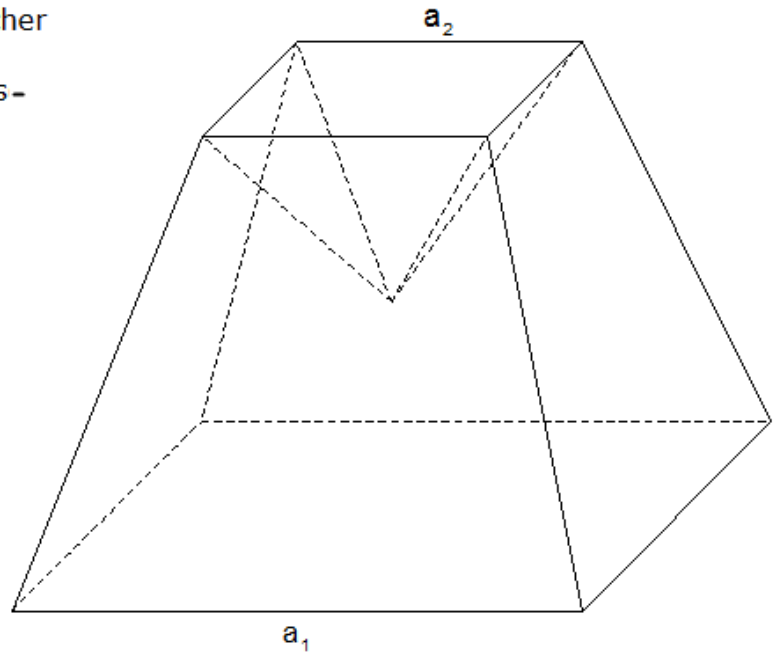
Es gelten folgende Maße:

$$V_R = 1700 \text{ cm}^3$$

$$a_1 = 15,0 \text{ cm}$$

$$h = 12,0 \text{ cm}$$

Berechnen Sie die Kante a_2 sowie die Oberfläche des Restkörpers.



Strategie 1994 1b:

Gegeben:

Quadratischer
Pyramidenstumpf

$$V_R = 1700 \text{ cm}^3$$

$$a_1 = 15,0 \text{ cm}$$

$$h = 12,0 \text{ cm}$$

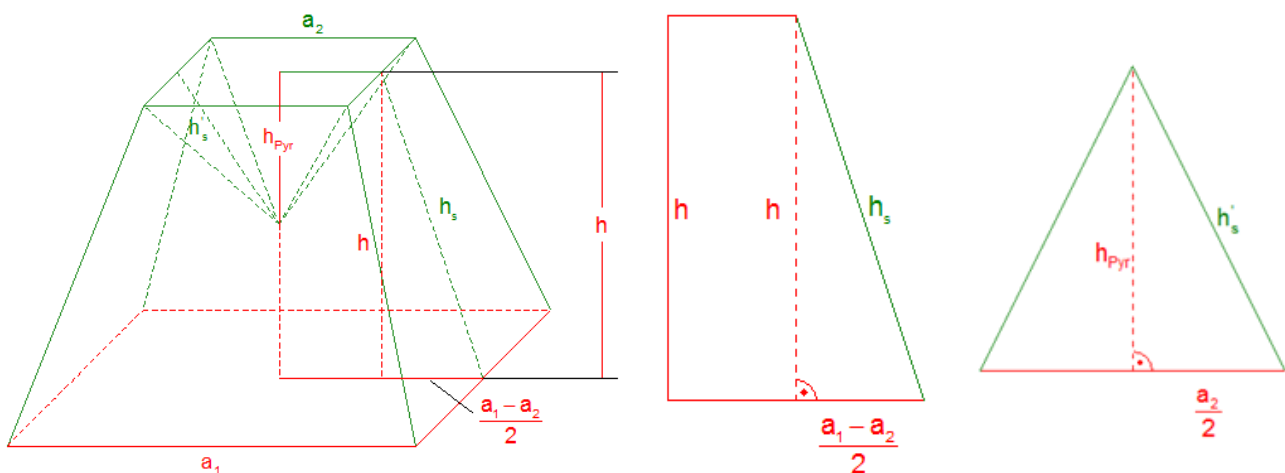
$$h_{\text{Pyr}} = \frac{1}{2} h = 6 \text{ cm}$$

Gesucht:

$$a_2$$

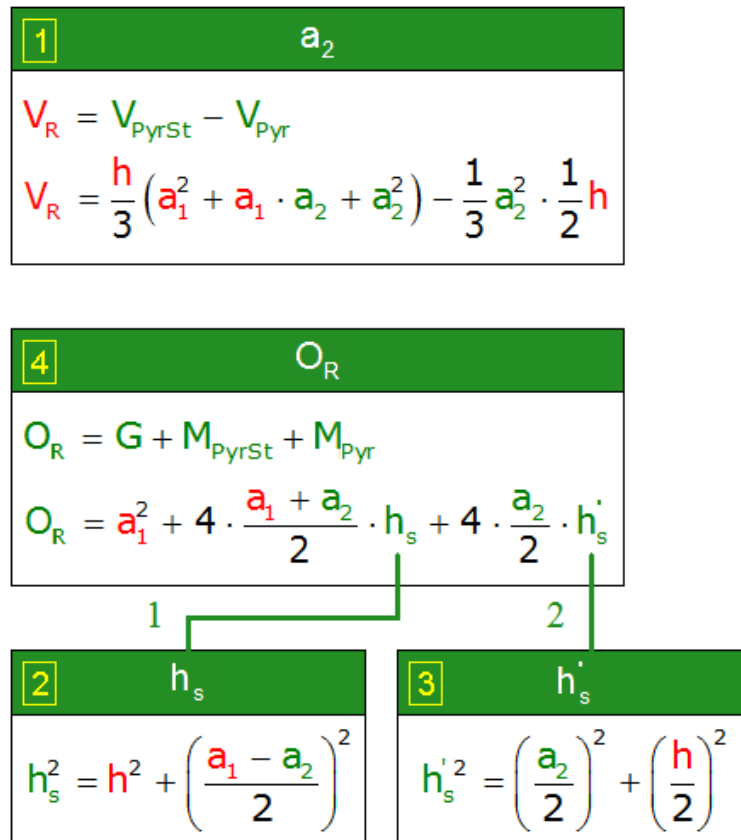
$$O_R$$

Skizze:



Strategie 1994 1b:

Struktogramm:



Lösung 1994 1b:

1. Berechnung der Oberkante a_2 :

$$V_R = V_{\text{PyrSt}} - V_{\text{Pyr}}$$

$$1700 = \frac{h}{3} (a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2) - \frac{1}{3} a_2^2 \cdot h_{\text{Pyr}}$$

$$1700 = \frac{h}{3} (a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2) - \frac{1}{3} a_2^2 \cdot \frac{1}{2} h$$

$$1700 = \frac{12}{3} (15^2 + 15 \cdot a_2 + a_2^2) - \frac{1}{3} a_2^2 \cdot 6$$

$$1700 = \frac{12}{3} (15^2 + 15 \cdot a_2 + a_2^2) - \frac{1}{3} a_2^2 \cdot 6 \quad \text{Zusammenfassen}$$

$$1700 = 4 (225 + 15 \cdot a_2 + a_2^2) - 2a_2^2$$

$$1700 = 4 (225 + 15 \cdot a_2 + a_2^2) - 2a_2^2$$

$$1700 = 4 (225 + 15 \cdot a_2 + a_2^2) - 2a_2^2 \quad \text{Summe ausmultiplizieren}$$

$$1700 = 900 + 60 \cdot a_2 + 4a_2^2 - 2a_2^2$$

$$1700 = 900 + 60 \cdot a_2 + 4a_2^2 - 2a_2^2$$

$$1700 = 900 + 60a_2 + 4a_2^2 - 2a_2^2 \quad \text{Zusammenfassen}$$

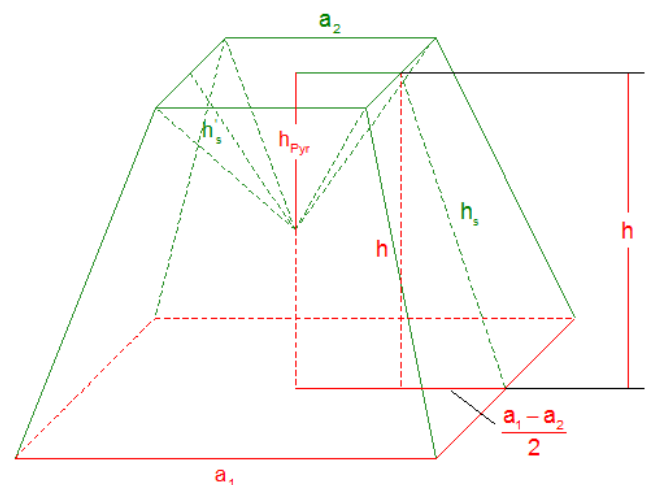
$$1700 = 900 + 60a_2 + 2a_2^2$$

$$1700 = 900 + 60a_2 + 2a_2^2 \quad \text{Seiten tauschen}$$

$$2a_2^2 + 60a_2 + 900 = 1700$$

$$2a_2^2 + 60a_2 - 800 = 0 \quad \begin{array}{l} | -1700 \\ | : 2 \end{array}$$

$$a_2^2 + 30a_2 - 400 = 0 \quad \text{Quadratische Gleichung in der Normalform}$$



Lösung 1994 1b:

$$x^2 + 30x - 400 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

p und q bestimmen

$$p = 30$$

$$q = -400$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{30}{2} \pm \sqrt{\frac{30^2}{4} - (-400)}$$

$$x_{1,2} = -15 \pm \sqrt{\frac{900}{4} + 400}$$

$$x_{1,2} = -15 \pm \sqrt{225 + 400}$$

$$x_{1,2} = -15 \pm \sqrt{625}$$

$$x_{1,2} = -15 \pm 25$$

$$x_1 = -15 + 25 = 10$$

$$x_2 = -15 - 25 = -40$$

keine Lösung,
da negativ

$$\underline{a_2 = 10 \text{ cm}}$$

2. Berechnung der Pyramidenstumpf-Seitenhöhe h_s :

$$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen
gelben Dreieck

$$h_s^2 = 12^2 + \left(\frac{15 - 10}{2}\right)^2$$

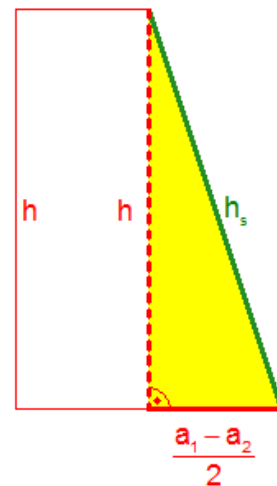
$$h_s^2 = 12^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$h_s^2 = 12^2 + 2,5^2$$

$$h_s^2 = 144 + 6,25$$

$$h_s^2 = 150,25 \quad \left| \sqrt{} \right.$$

$$\underline{h_s = 12,3 \text{ cm}}$$



3. Berechnung der Pyramiden-Seitenhöhe h'_s :

$$h_s'^2 = \left(\frac{a_2}{2}\right)^2 + h_{\text{Pyr}}^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen
hellblauen Teildreieck

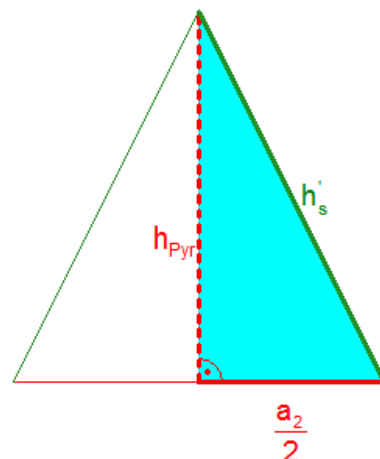
$$h_s'^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 6^2$$

$$h_s'^2 = 5^2 + 6^2$$

$$h_s'^2 = 25 + 36$$

$$h_s'^2 = 61 \quad \left| \sqrt{} \right.$$

$$\underline{h'_s = 7,8 \text{ cm}}$$



Lösung 1994 1b:

4. Berechnung der Restkörper-Oberfläche O_R :

$$O_R = G + M_{\text{PyrSt}} + M_{\text{Pyr}}$$

$$O_R = a_1^2 + 4 \cdot m \cdot h_s + 4 \cdot \frac{a_2 \cdot h'_s}{2}$$

$$O_R = a_1^2 + 4 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_s + 4 \cdot \frac{a_2 \cdot h'_s}{2}$$

$$O_R = 15^2 + 4 \cdot \frac{15 + 10}{2} \cdot 12,3 + 4 \cdot \frac{10 \cdot 7,8}{2}$$

$$O_R = 225 + 4 \cdot \frac{25}{2} \cdot 12,3 + 4 \cdot \frac{78}{2}$$

$$O_R = 225 + 4 \cdot 12,5 \cdot 12,3 + 4 \cdot 39$$

$$O_R = 225 + 615 + 156$$

$$\underline{\underline{O_R = 996 \text{ cm}^2}}$$

