Aufgabe 1993 2b: **4 P**

Ein Werkstück ist zusammengesetzt aus Halbkugel, Zylinder und Kegelstumpf (siehe Achsenschnitt). Für eine andere Ausführung gilt:

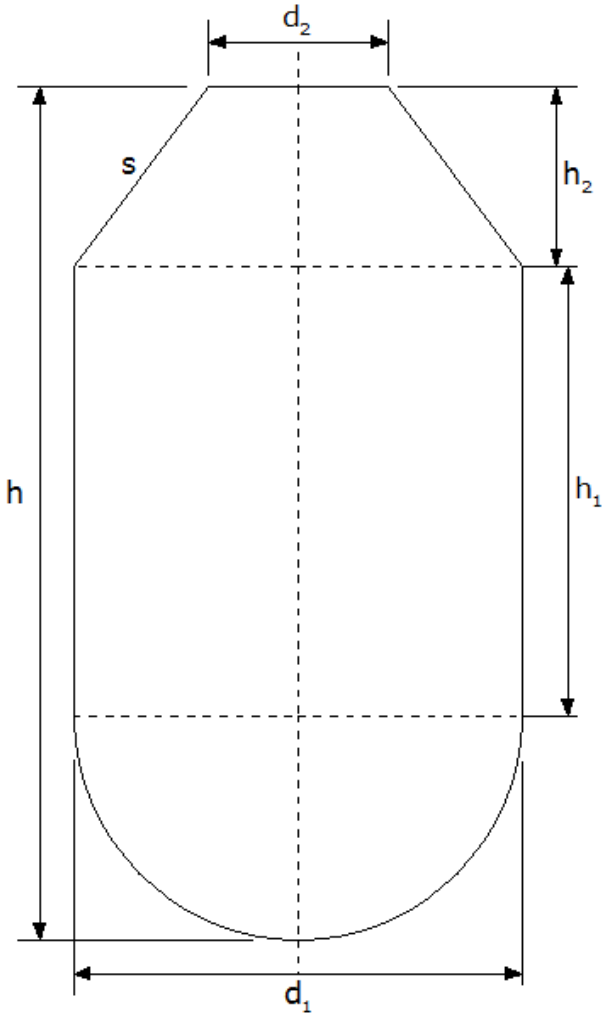
$d_1 = 7,2\,cm$

$d_2 = 5,8\,cm$

$h_1 = 5,4\,cm$

$h_2 = 2,5\,cm$

Bei dieser Ausführung wird der Kegelstumpf parallel zur Grundfläche so abgeschnitten, daß das neue Werkstück eine Gesamthöhe von 10,0 cm bekommt. Berechnen Sie das Volumen des neuen Werkstücks.



Strategie 1993 2b:

Gegeben:

Halbkugel, Zylinder und Kegelstumpf

$d_1 = 7,2\,cm$

$d_2 = 5,8\,cm$

$h_1 = 5,4\,cm$

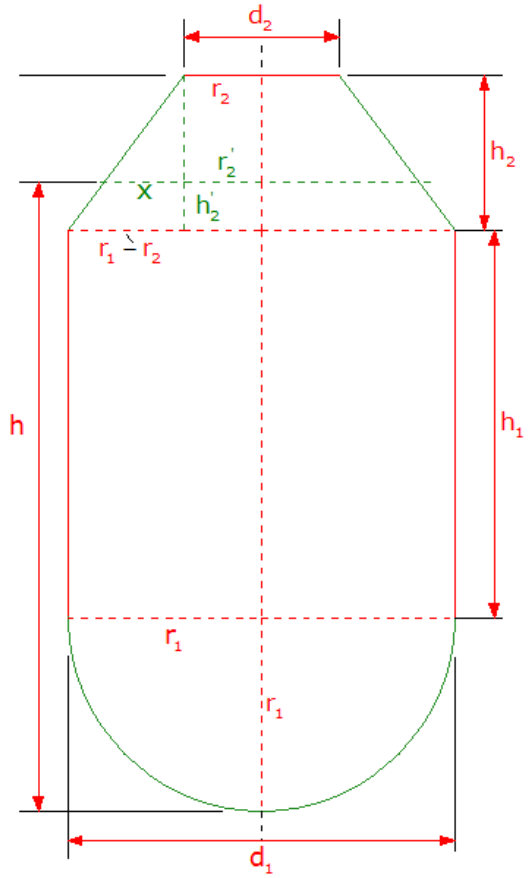
$h_2 = 2,5\,cm$

$h = 10,0\,cm$

Gesucht:

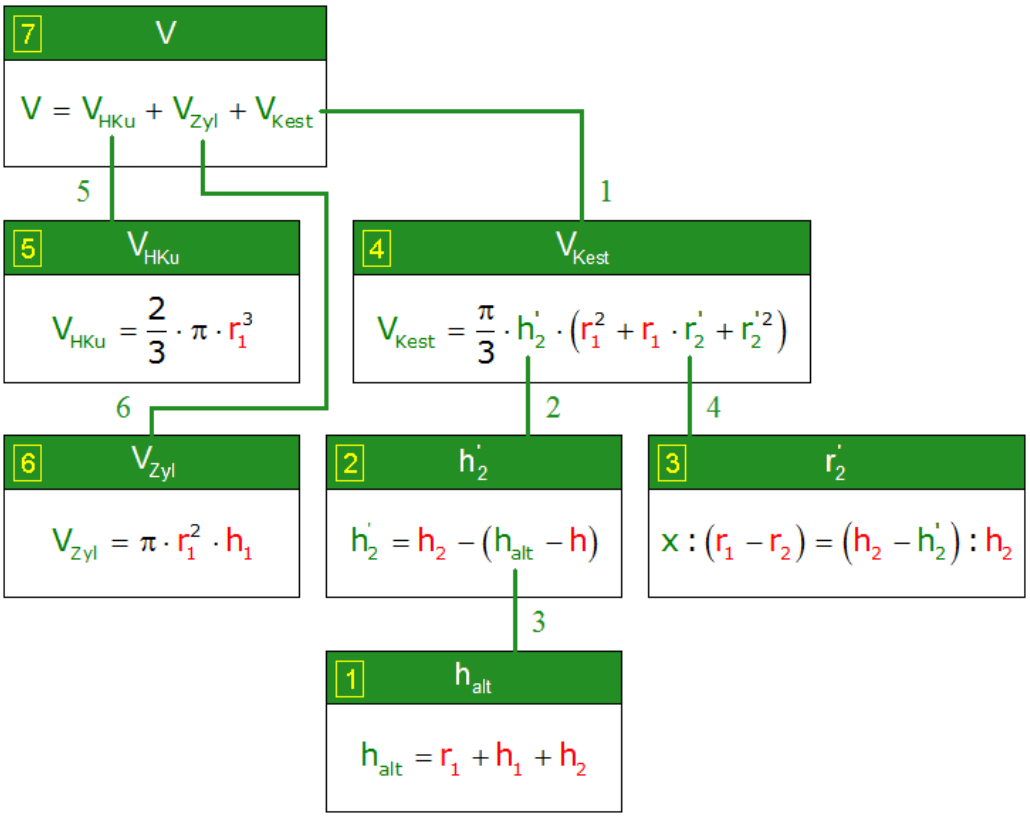
V

Skizze:



Strategie 1993 2b:

Struktogramm:



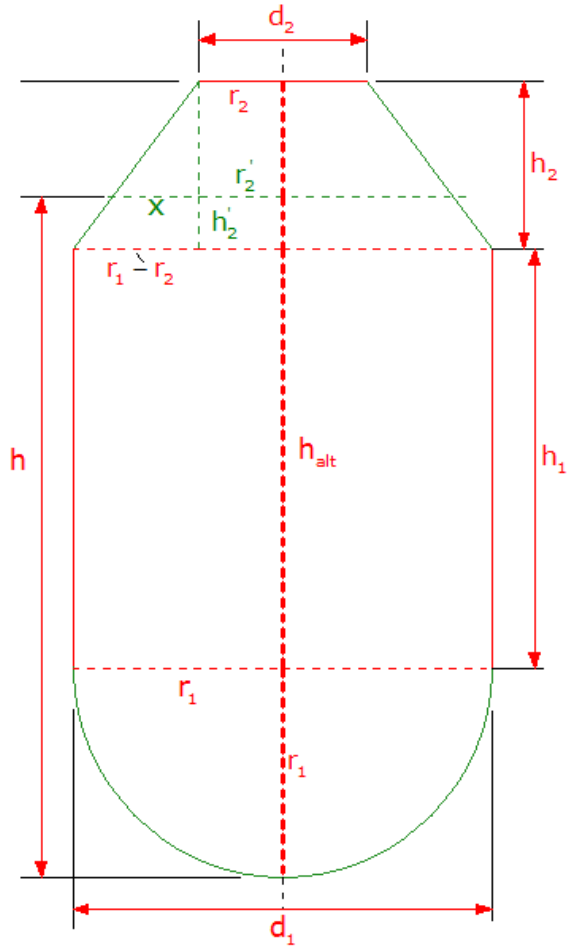
Lösung 1993 2b:

1. Berechnung der Körperhöhe h_{alt} vor dem Schnitt:

$h_{alt} = r_1 + h_1 + h_2$

$h_{alt} = 3,6 + 5,4 + 2,5$

$h_{alt} = 11,5\,cm$



Lösung 1993 2b:

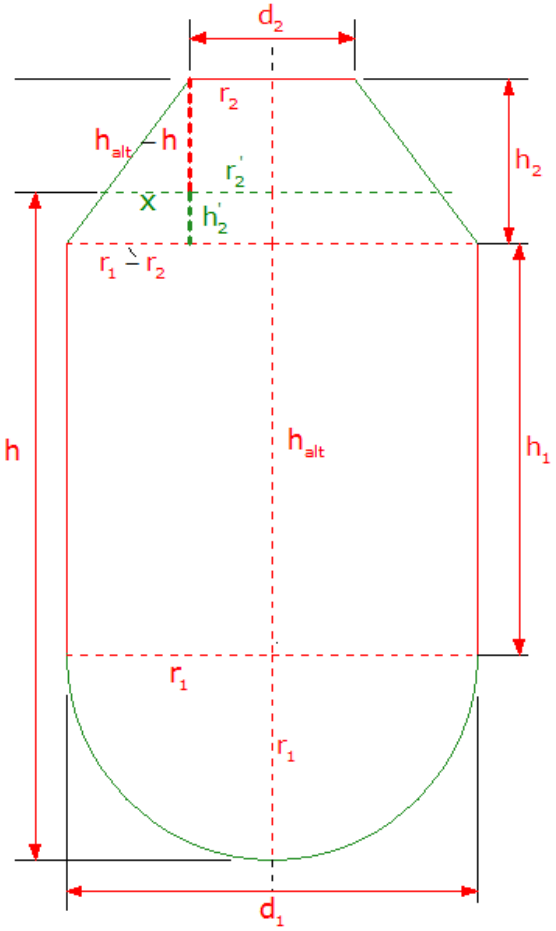
2. Berechnung der neuen Höhe h_2' des Kegelstumpfes:

$$h_2' = h_2 - (h_{alt} - h)$$

$$h_2' = 2,5 - (11,5 - 10)$$

$$h_2' = 2,5 - 1,5$$

$$\underline{h_2' = 1,0\,cm}$$



3. Berechnung des neuen Kegelstumpfradius r_2':

$$x : (r_1 - r_2) = (h_2 - h_2') : h_2 \qquad \text{2. Strahlensatz}$$

$$x : (3,6 - 2,9) = (2,5 - 1,0) : 2,5$$

$$x : 0,7 = 1,5 : 2,5$$

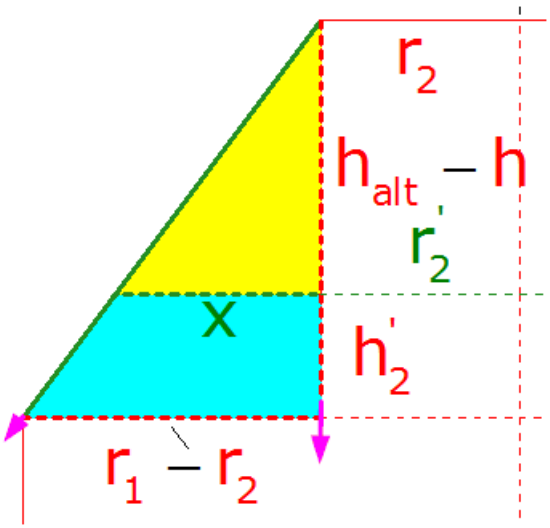
$$\frac{x}{0,7} = \frac{1,5}{2,5} \qquad | \cdot 0,7$$

$$\underline{x = 0,4\,cm}$$

$$r_2' = r_2 + x$$

$$r_2' = 2,9 + 0,4$$

$$\underline{r_2' = 3,3\,cm}$$



Lösung 1993 2b:

4. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{Kest}:

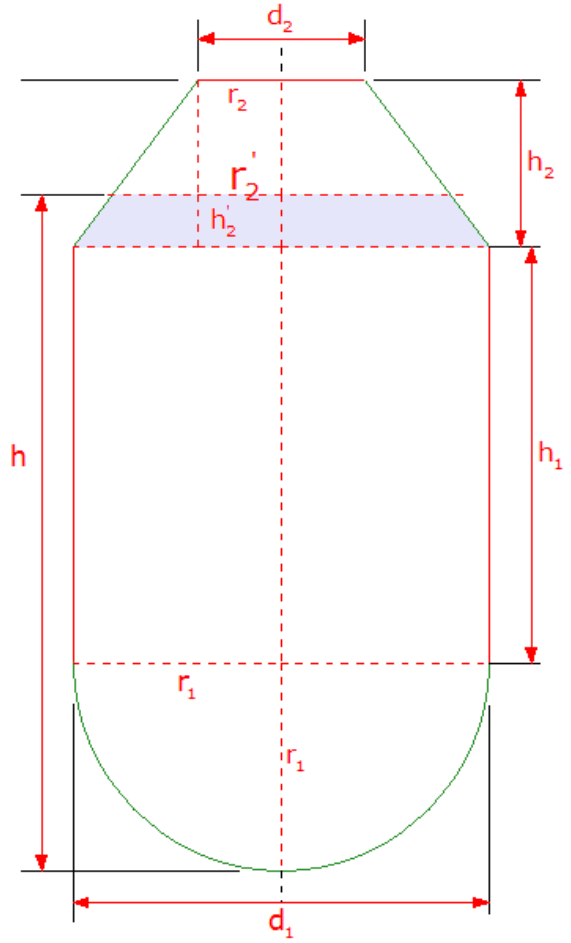
$$V_{Kest} = \frac{\pi}{3} \cdot h_2' \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2' + r_2'^2\right)$$

$$V_{Kest} = \frac{\pi}{3} \cdot 1 \cdot \left(3,6^2 + 3,6 \cdot 3,3 + 3,3^2\right)$$

$$V_{Kest} = \frac{\pi}{3} \cdot \left(12,96 + 11,88 + 10,89\right)$$

$$V_{Kest} = \frac{\pi}{3} \cdot 35,73$$

$$V_{Kest} = 37,42\,cm^3$$

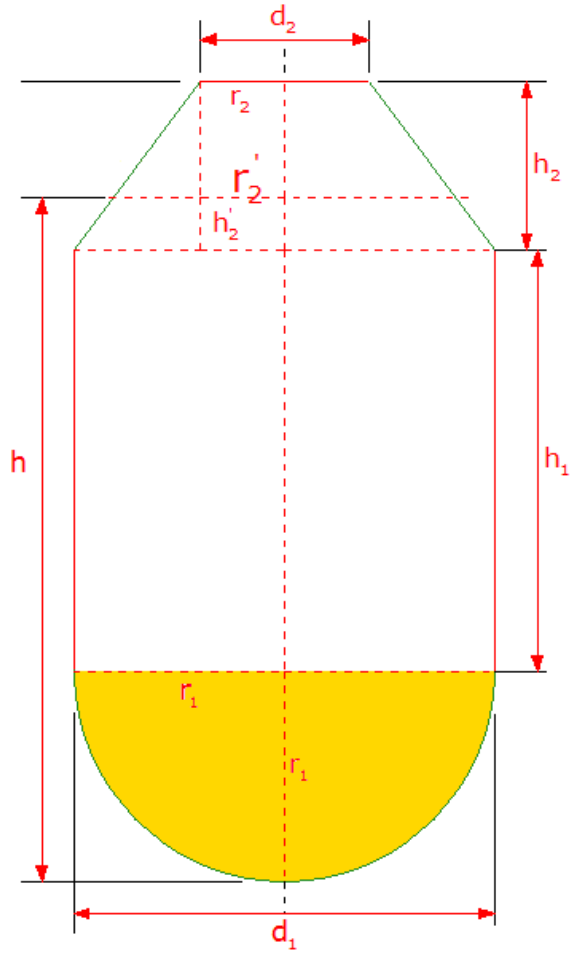


5. Berechnung des Halbkugelvolumens V_{HKu}:

$$V_{HKu} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r_1^3$$

$$V_{HKu} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 3,6^3$$

$$V_{HKu} = 97,72\,cm^3$$



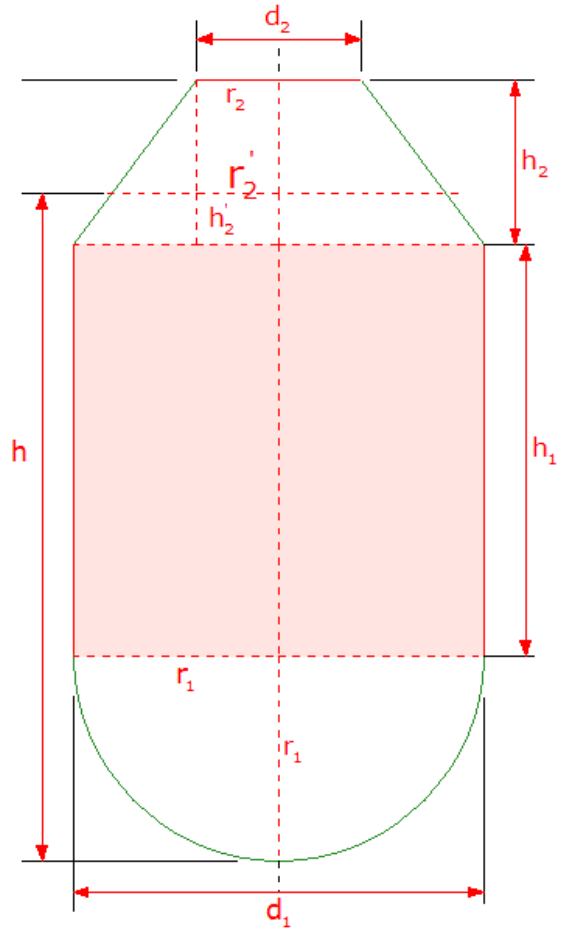
Lösung 1993 2b:

6. Berechnung des Zylindervolumens V_{Zyl}:

$$V_{Zyl} = \pi \cdot r_1^2 \cdot h_1$$

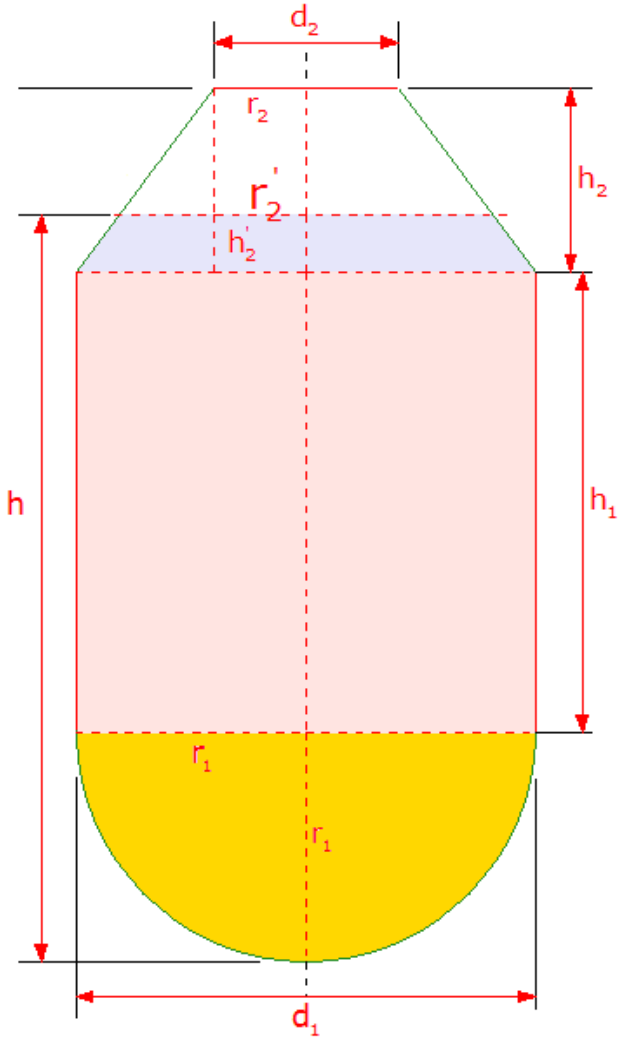
$$V_{Zyl} = \pi \cdot 3,6^2 \cdot 5,4$$

$$V_{Zyl} = 219,86\,cm^3$$



7. Berechnung des Gesamtvolumens V:

$$V = V_{HKu} + V_{Zyl} + V_{Kest}$$

$$V = 97,72 + 219,86 + 37,42$$

$$V = 355\,cm^3$$