Aufgabe 1993 1b: **4 P**

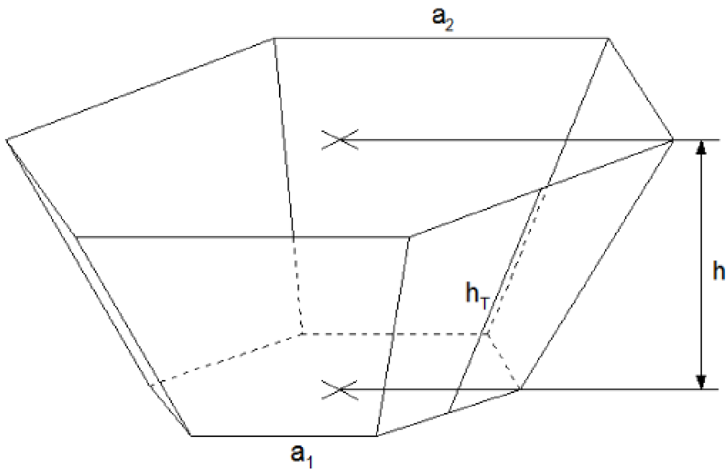
Behälter II hat die Form eines regelmäßigen sechsseitigen Pyramidenstumpfes.
Es gilt:

$F = 1728\,cm^2$ (Innenfläche des Behälters)

$h_T = 30,0\,cm$

$a_2 = 12,0\,cm$

Berechnen Sie die Höhe h dieses Behälters.



Strategie 1993 1b:

Gegeben:

Regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf

$F = 1728\,cm^2$

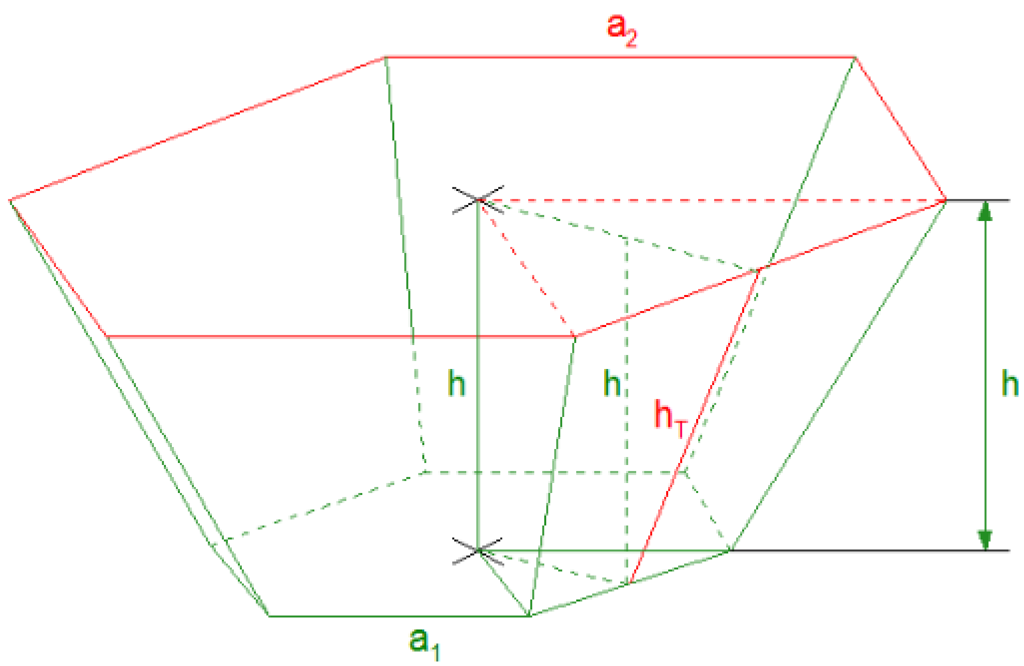
$h_T = 30,0\,cm$

$a_2 = 12,0\,cm$

Gesucht:

h

Skizze:



Strategie 1993 1b:

Struktogramm:

4 h

$$h^2 + (h_2 - h_1)^2 = h_T^2$$

3 — 1

3 h_2

$$h_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \sqrt{3}$$

2 h_1

$$h_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \sqrt{3}$$

2

1 a_1

$$F = \frac{3}{2} \cdot a_1^2 \cdot \sqrt{3} + 6 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_T$$

Lösung 1993 1b:

1. Berechnung der Grundkante a_1:

$F = G + M$

$F = \frac{3}{2} a_1^2 \sqrt{3} + 6 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_T$

$1728 = \frac{3}{2} a_1^2 \sqrt{3} + 6 \cdot \frac{a_1 + 12}{2} \cdot 30$

$1728 = 1{,}5 \cdot a_1^2 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot (a_1 + 12) \cdot 30$

$1728 = 1{,}5 \cdot a_1^2 \cdot \sqrt{3} + 90 \cdot (a_1 + 12)$

$1728 = 1{,}5 \cdot a_1^2 \cdot \sqrt{3} + 90 \cdot a_1 + 1080$ Seiten tauschen

$1{,}5 \cdot a_1^2 \cdot \sqrt{3} + 90 \cdot a_1 + 1080 = 1728$ $| -1728$

$1{,}5 \cdot a_1^2 \cdot \sqrt{3} + 90 \cdot a_1 - 648 = 0$

$2{,}6 \cdot a_1^2 + 90 \cdot a_1 - 648 = 0$ $| : 2{,}6$

$a_1^2 + 34{,}6 \cdot a_1 - 249{,}2 = 0$ Quadratische Gleichung in der Normalform

$a_1^2 + 34{,}6 \cdot a_1 - 249{,}2 = 0$

$x^2 + px + q = 0$

$p = 34{,}6$

$q = -249{,}2$ p und q bestimmen

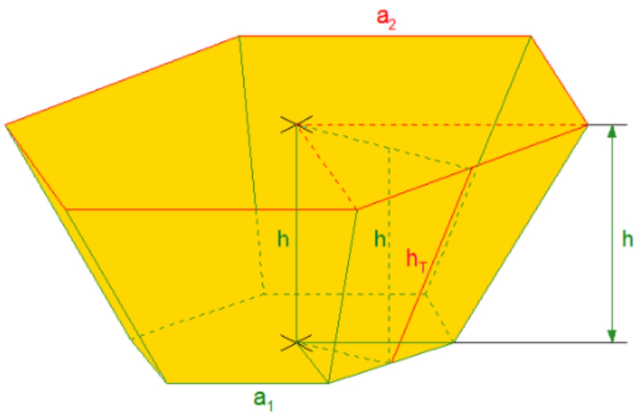
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ Lösungsformel

$x_{1,2} = -\frac{34{,}6}{2} \pm \sqrt{\frac{34{,}6^2}{4} - (-249{,}2)}$

$x_{1,2} = -17{,}3 \pm \sqrt{\frac{1197{,}16}{4} + 249{,}2}$

$x_{1,2} = -17{,}3 \pm \sqrt{299{,}29 + 249{,}2}$

$x_{1,2} = -17{,}3 \pm \sqrt{548{,}49}$



Lösung 1993 1b:

$x_{1,2} = -17{,}3 \pm 23{,}4$

$x_1 = -17{,}3 + 23{,}4$

$\underline{x_1 = 6{,}1\,\text{cm}} \Rightarrow \underline{a_1 = 6{,}1\,\text{cm}}$

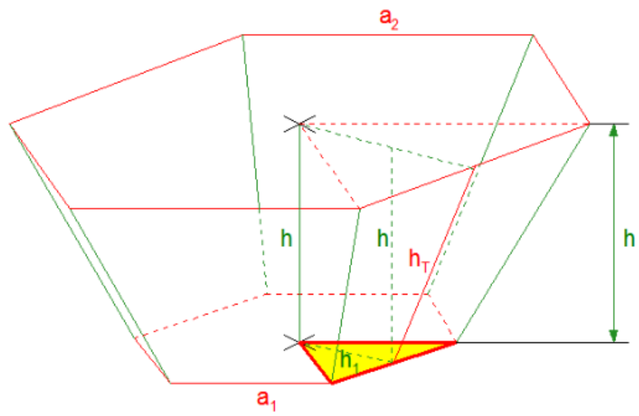
$x_2 = -17{,}3 - 23{,}4 = \cancel{-40{,}7}$ keine Lösung, da negativ

2. Berechnung der Dreieckshöhe h_1:

$h_1 = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{3}$ Höhenformel gleichseitiges Dreieck

$h_1 = \frac{1}{2} \cdot 6{,}1 \cdot \sqrt{3}$

$\underline{h_1 = 5{,}3\,\text{cm}}$

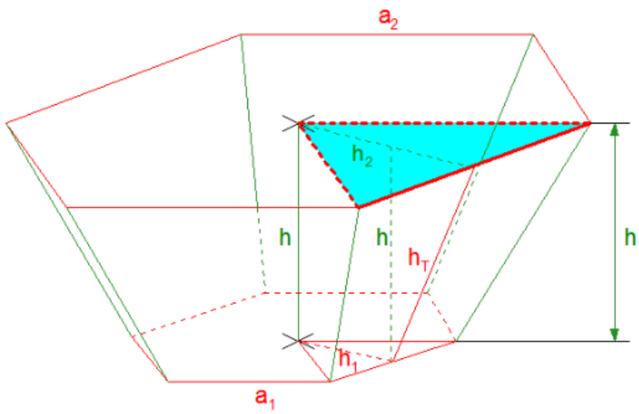


3. Berechnung der Dreieckshöhe h_2:

$h_2 = \frac{1}{2} a_2 \sqrt{3}$ Höhenformel gleichseitiges Dreieck

$h_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{3}$

$\underline{h_2 = 10{,}4\,\text{cm}}$



4. Berechnung der Pyramidenstumpfhöhe h:

$h^2 + (h_2 - h_1)^2 = h_T^2$ Pythagoras im rechtwinkligen grünen Dreieck

$h^2 + (10{,}4 - 5{,}3)^2 = 30^2$

$h^2 + 5{,}1^2 = 30^2$

$h^2 + 26{,}01 = 900 \quad | -26{,}01$

$h^2 = 873{,}99 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{\underline{h = 29{,}6\,\text{cm}}}$