

Aufgabe 1992 1c:

3 P

Das Dach eines Kirchturmes hat die Form eines quadratischen Pyramidenstumpfes mit einer aufgesetzten quadratischen Pyramide.

Für ein anderes Dach dieser Form gilt:

$$a_1 = 4e$$

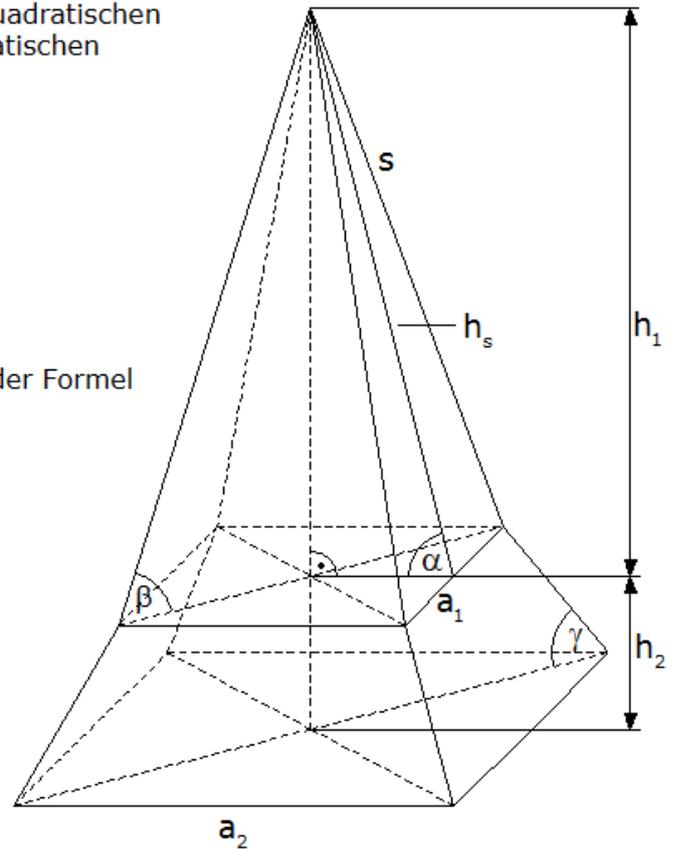
$$a_2 = 6e$$

$$h_1 = 11e$$

$$h_2 = e$$

Zeigen Sie, daß sich die gesamte Dachfläche mit der Formel

$$A = 20e^2 (\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$$
 berechnen läßt.



Strategie 1992 1c:

Gegeben:

Quadratischer Pyramidenstumpf
und quadratische Pyramide

$$a_1 = 4e$$

$$a_2 = 6e$$

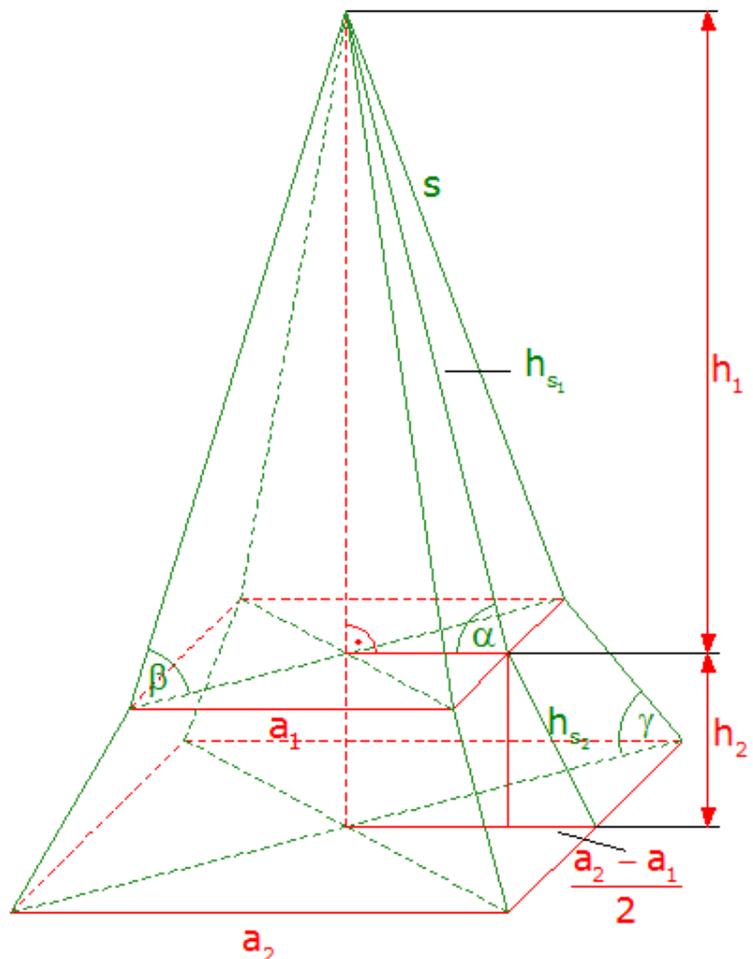
$$h_1 = 11e$$

$$h_2 = e$$

Gesucht:

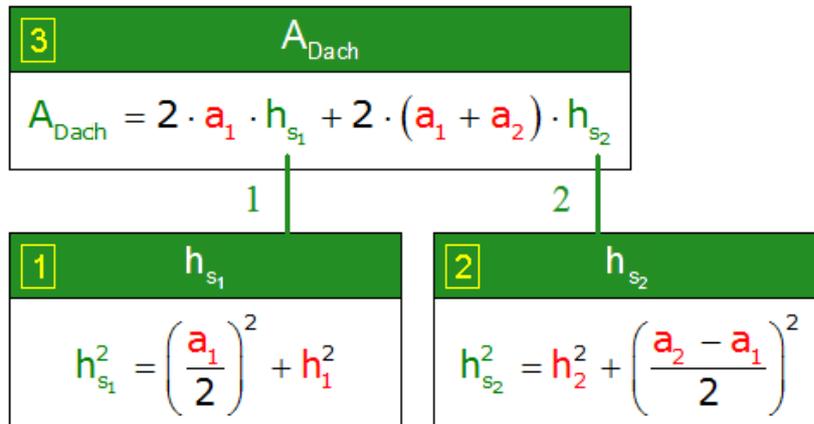
$$A_{\text{Dach}} = 20e^2 (\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$$

Skizze:



Strategie 1992 1c:

Struktogramm:



Lösung 1992 1c:

1. Berechnung der Höhe der Seitenfläche h_s :

$h_{s_1}^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + h_1^2$ Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$h_{s_1}^2 = \left(\frac{4e}{2}\right)^2 + (11e)^2$

$h_{s_1}^2 = (2e)^2 + (11e)^2$

$h_{s_1}^2 = 4e^2 + 121e^2$

$h_{s_1}^2 = 125e^2$ $|\sqrt{\quad}$

$h_{s_1} = \sqrt{125e^2}$

$h_{s_1} = \sqrt{125} \cdot \sqrt{e^2}$ Wurzelgesetz $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

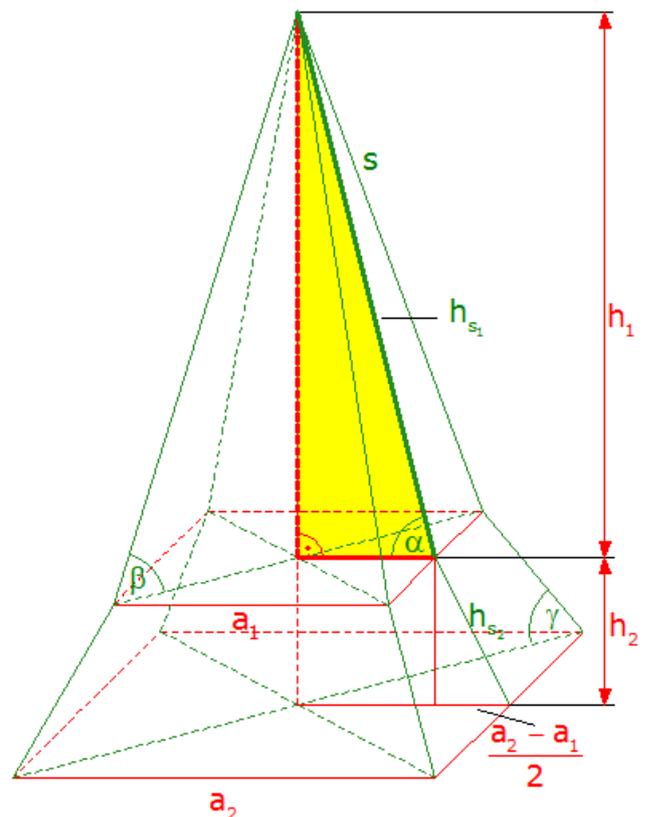
$h_{s_1} = \sqrt{125} \cdot e$

$h_{s_1} = \sqrt{5 \cdot 25} \cdot e$

$h_{s_1} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{25} \cdot e$ Wurzelgesetz $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$h_{s_1} = \sqrt{5} \cdot 5 \cdot e$

$h_{s_1} = 5e\sqrt{5}$



Lösung 1992 1c:

2. Berechnung der Höhe der Seitenfläche h_{s_2} :

$$h_{s_2}^2 = h_2^2 + \left(\frac{a_2 - a_1}{2}\right)^2 \quad \text{Pythagoras im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck}$$

$$h_{s_2}^2 = e^2 + \left(\frac{6e - 4e}{2}\right)^2$$

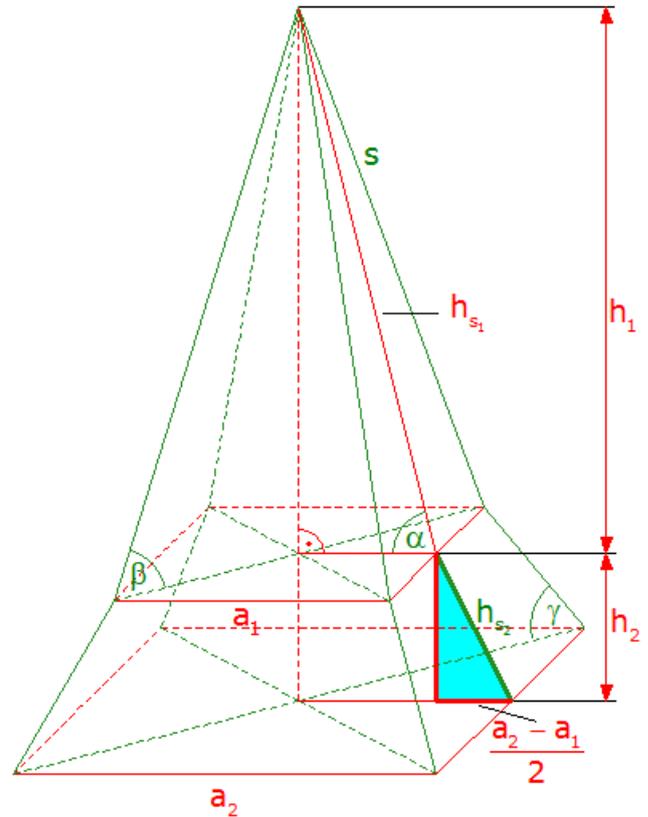
$$h_{s_2}^2 = e^2 + e^2$$

$$h_{s_2}^2 = 2e^2 \quad \left| \sqrt{\quad} \right.$$

$$h_{s_2} = \sqrt{2e^2}$$

$$h_{s_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{e^2} \quad \text{Wurzelgesetz } \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\underline{\underline{h_{s_2} = e\sqrt{2}}}$$



3. Berechnung der gesamten Dachfläche A_{Dach} :

$$A_{\text{Dach}} = 2 \cdot a_1 \cdot h_{s_1} + 2 \cdot (a_1 + a_2) \cdot h_{s_2}$$

$$A_{\text{Dach}} = 2 \cdot 4e \cdot 5e\sqrt{5} + 2 \cdot (4e + 6e) \cdot e\sqrt{2}$$

$$A_{\text{Dach}} = 40e^2\sqrt{5} + 2 \cdot 10e \cdot e\sqrt{2}$$

$$A_{\text{Dach}} = 40e^2\sqrt{5} + 20e^2\sqrt{2}$$

$$A_{\text{Dach}} = 20e^2 \cdot 2\sqrt{5} + 20e^2\sqrt{2}$$

$$A_{\text{Dach}} = 20e^2 (2\sqrt{5} + \sqrt{2})$$

$$\underline{\underline{A_{\text{Dach}} = 20e^2 (\sqrt{2} + 2\sqrt{5})}}$$

