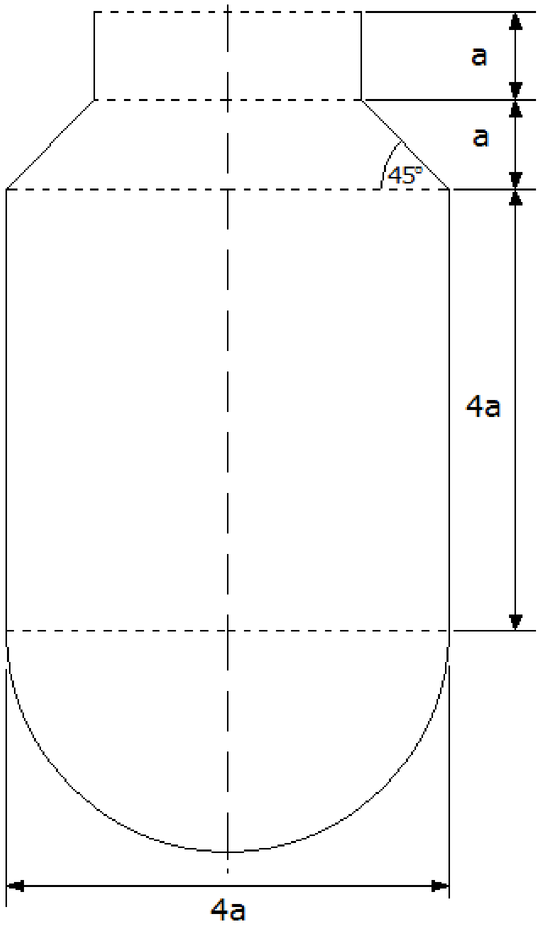
Aufgabe 1990 2c: **3 P**

Die nebenstehende Skizze zeigt den Schnitt durch einen anderen Behälter.
Zeigen Sie, daß sich das Gesamtvolumen dieses Behälters nach der Formel

$V = \frac{74}{3}\pi a^3$ berechnen läßt.

Wie groß ist a, wenn das Volumen

$V = 1\,\text{Liter}$ beträgt?



Strategie 1990 2c:

Gegeben:

Halbkugel + Kegelstumpf
+ zwei Zylinder

$r_{HK} = 2a$

$r_{Zyl1} = 2a$

$h_{Zyl1} = 4a$

$r_{1KeSt} = 2a$

$h_{KeSt} = a$

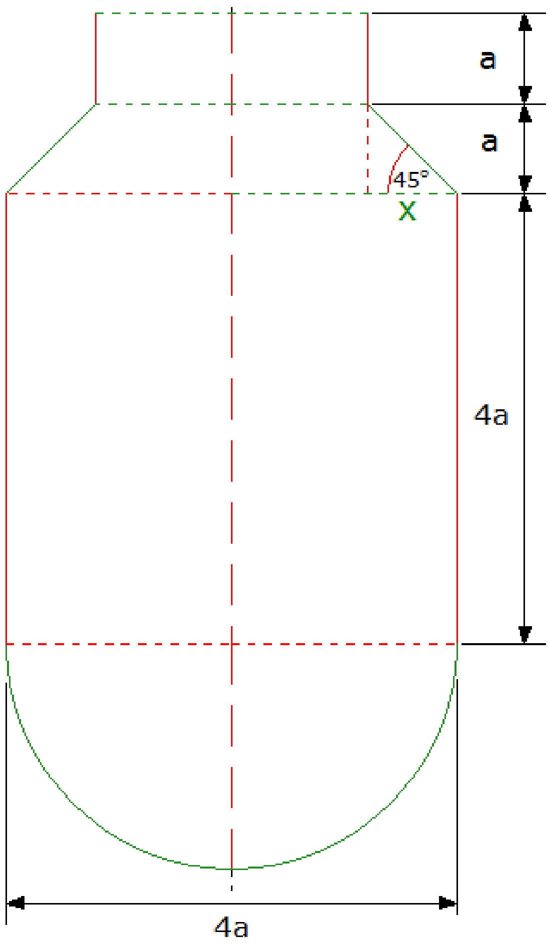
$h_{Zyl2} = a$

$\alpha = 45°$

Gesucht:

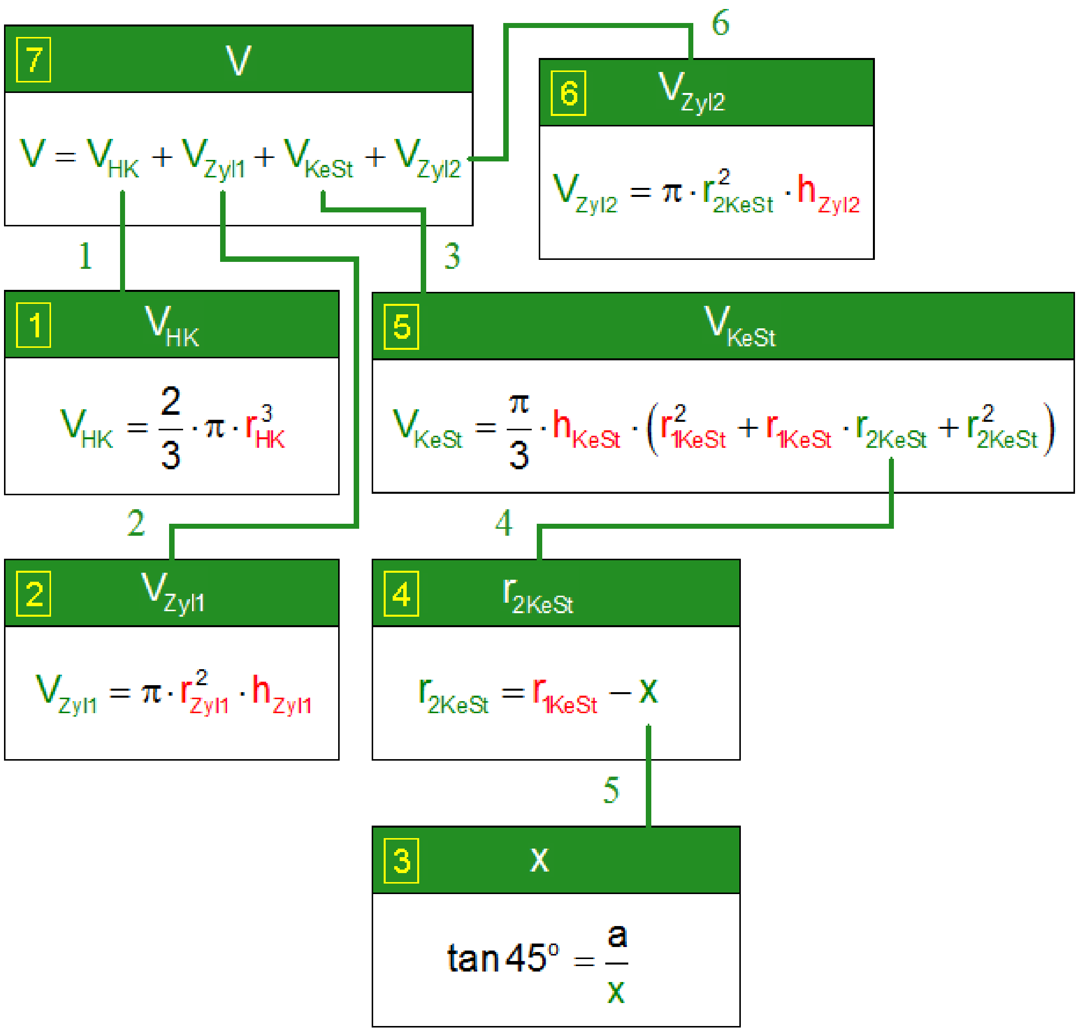
V

Skizze:



Strategie 1990 2c:

<u>Struktogramm:</u>



Lösung 1990 2c:

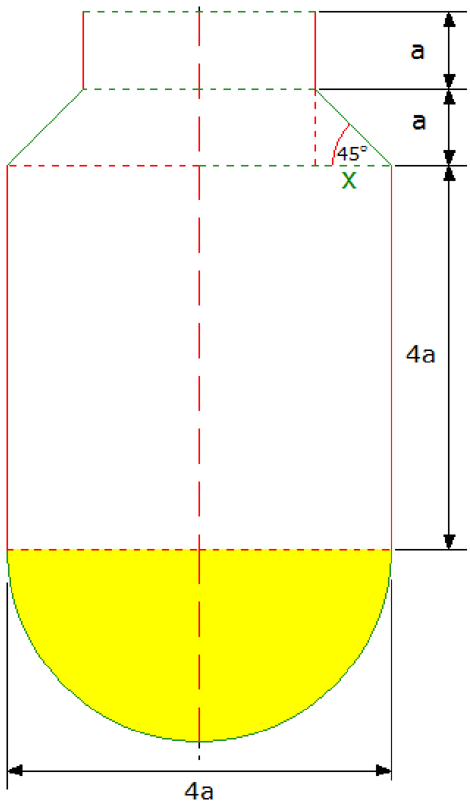
<u>1. Berechnung des Halbkugelvolumens</u> V_{HK}:

$$V_{HK} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r_{HK}^3$$

$$V_{HK} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (2a)^3$$

$$V_{HK} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 8a^3$$

$$\underline{V_{HK} = \frac{16}{3} \cdot \pi \cdot a^3}$$



Lösung 1990 2c:

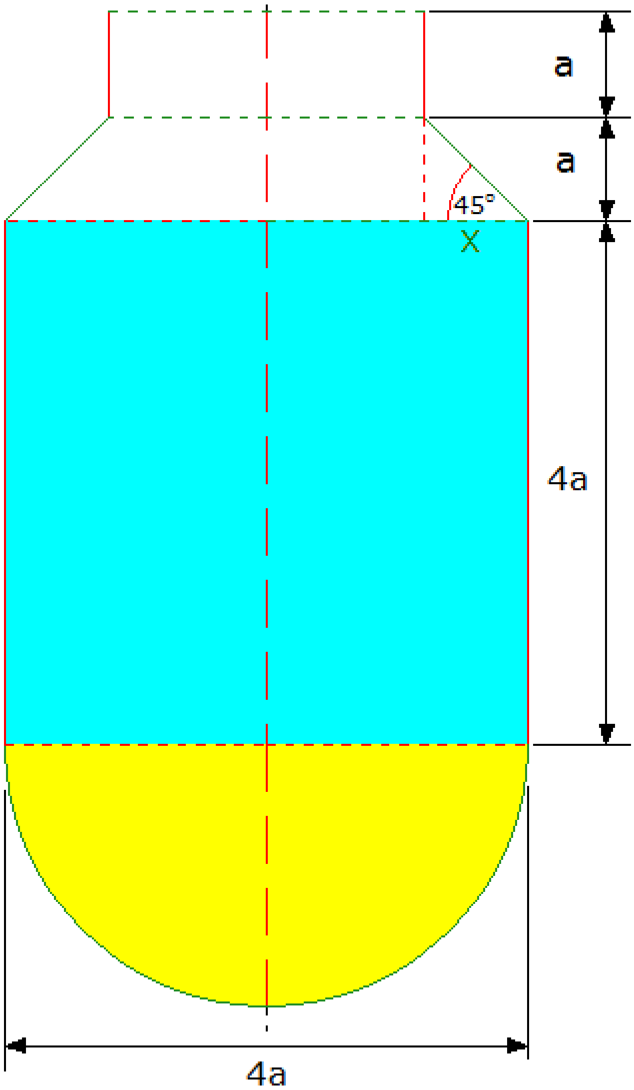
2. Berechnung des Zylindervolumens V_{Zyl1}:

$$V_{Zyl1} = \pi \cdot r_{Zyl1}^2 \cdot h_{Zyl1}$$

$$V_{Zyl1} = \pi \cdot (2a)^2 \cdot 4a$$

$$V_{Zyl1} = \pi \cdot 4a^2 \cdot 4a$$

$$\underline{V_{Zyl1} = 16 \cdot \pi \cdot a^3}$$



3. Berechnung der Strecke x:

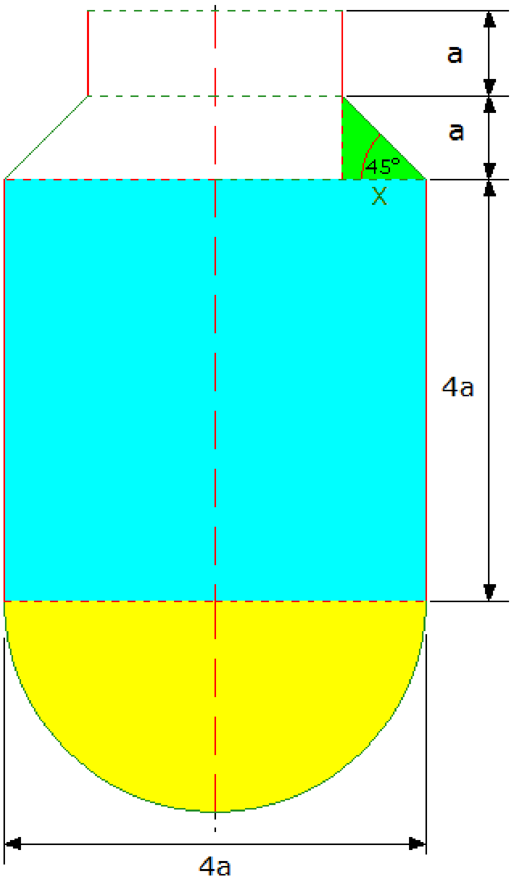
$$\tan 45° = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h_{KeSt}}{x}$$

Tangensfunktion im rechtwinkligen grünen Dreieck

$$\tan 45° = \frac{a}{x} \qquad \tan 45° = 1$$

$$1 = \frac{a}{x} \qquad | \cdot x$$

$$\underline{x = a}$$



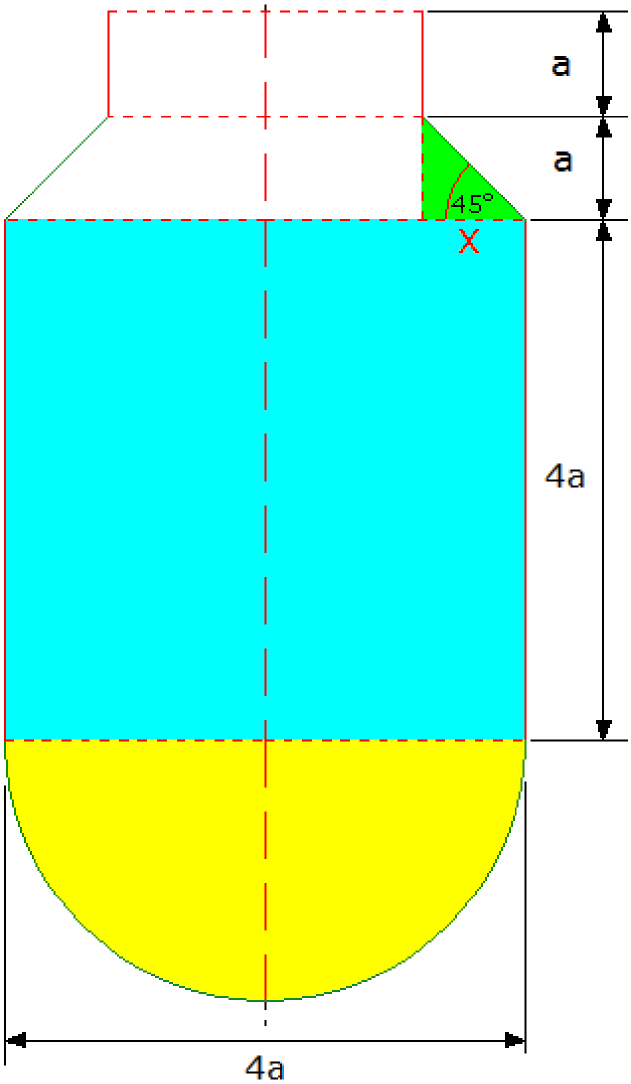
Lösung 1990 2c:

4. Berechnung des Kegelstumpfradius r_{2KeSt}:

$$r_{2KeSt} = r_{1KeSt} - x$$

$$r_{2KeSt} = 2a - a$$

$$\underline{r_{2KeSt} = a}$$



5. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{KeSt}:

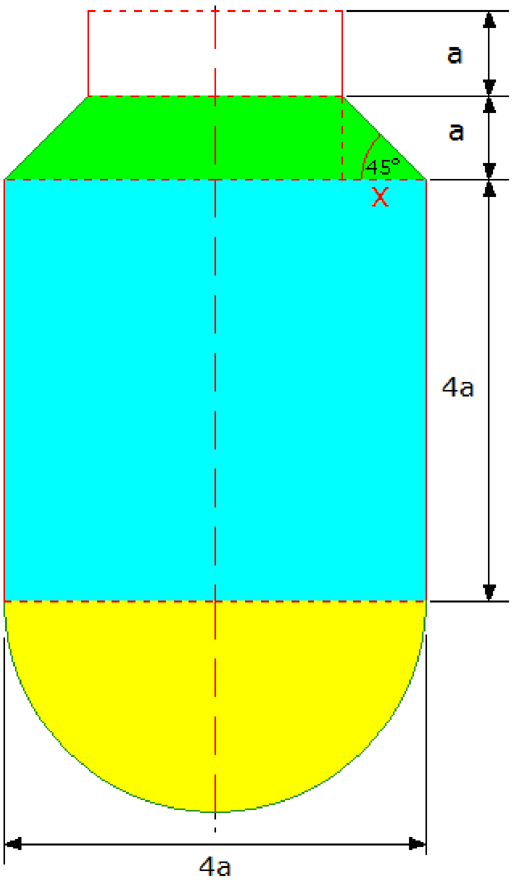
$$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot h_{KeSt} \cdot \left(r_{1KeSt}^2 + r_{1KeSt} \cdot r_{2KeSt} + r_{2KeSt}^2\right)$$

$$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot a \cdot \left((2a)^2 + 2a \cdot a + a^2\right)$$

$$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot a \cdot \left(4a^2 + 2a^2 + a^2\right)$$

$$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot a \cdot 7a^2$$

$$\underline{V_{KeSt} = \frac{7}{3} \cdot \pi \cdot a^3}$$



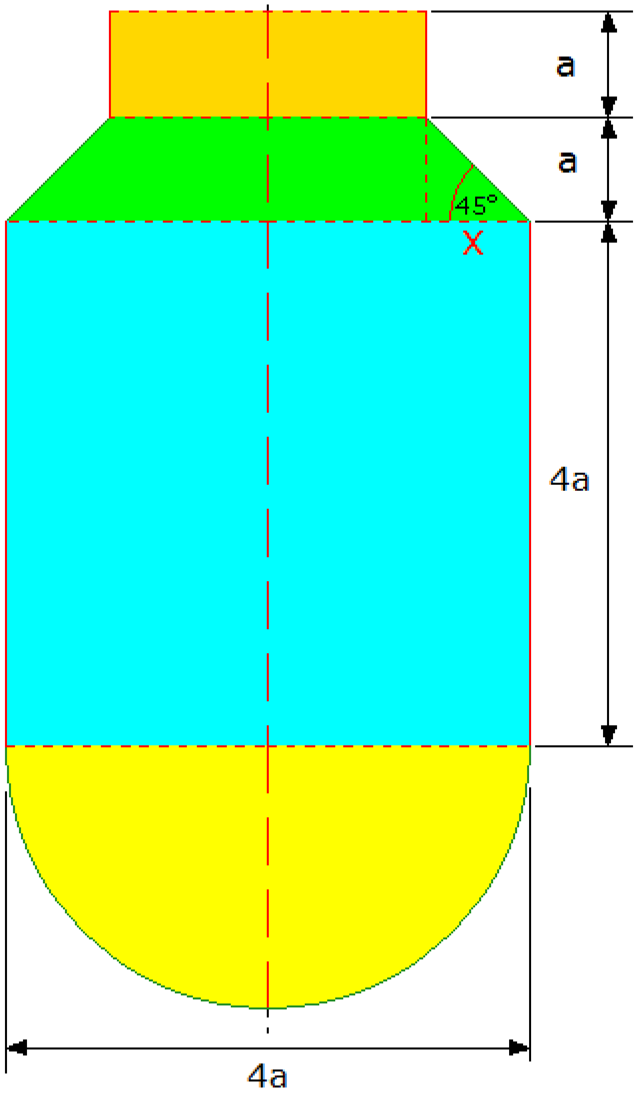
Lösung 1990 2c:

6. Berechnung des Zylindervolumens V_{Zyl2}:

$$V_{Zyl2} = \pi \cdot r_{2KeSt}^2 \cdot h_{Zyl2}$$

$$V_{Zyl2} = \pi \cdot a^2 \cdot a$$

$$V_{Zyl2} = \pi \cdot a^3$$



7. Berechnung des Gesamtvolumens V:

$$V = V_{HK} + V_{Zyl1} + V_{KeSt} + V_{Zyl2}$$

$$V = \frac{16}{3}\pi a^3 + 16\pi a^3 + \frac{7}{3}\pi a^3 + \pi a^3$$

gemeinsamen Faktor ausklammern

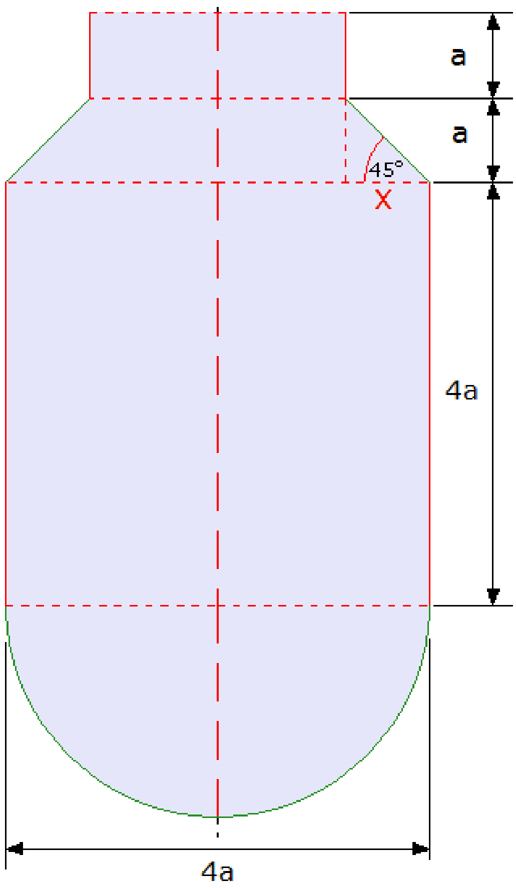
$$V = \pi a^3\left(\frac{16}{3} + 16 + \frac{7}{3} + 1\right)$$

Brüche gleichnamig machen

$$V = \pi a^3\left(\frac{16}{3} + \frac{48}{3} + \frac{7}{3} + \frac{3}{3}\right)$$

$$V = \pi a^3 \frac{74}{3}$$

$$V = \frac{74}{3}\pi a^3$$



Lösung 1990 2c:

8. Berechnung von a für $V = 1\text{Liter}$:

$1\text{Liter} = 1000\,\text{cm}^3$

$$\frac{74}{3}\pi a^3 = 1000 \qquad \left|\cdot \frac{3}{74}\right.$$

$$\pi a^3 = 40{,}54 \qquad |:\pi$$

$$a^3 = 12{,}90 \qquad |\sqrt[3]{}$$

$$\underline{\underline{a = 2{,}35\,\text{cm}}}$$