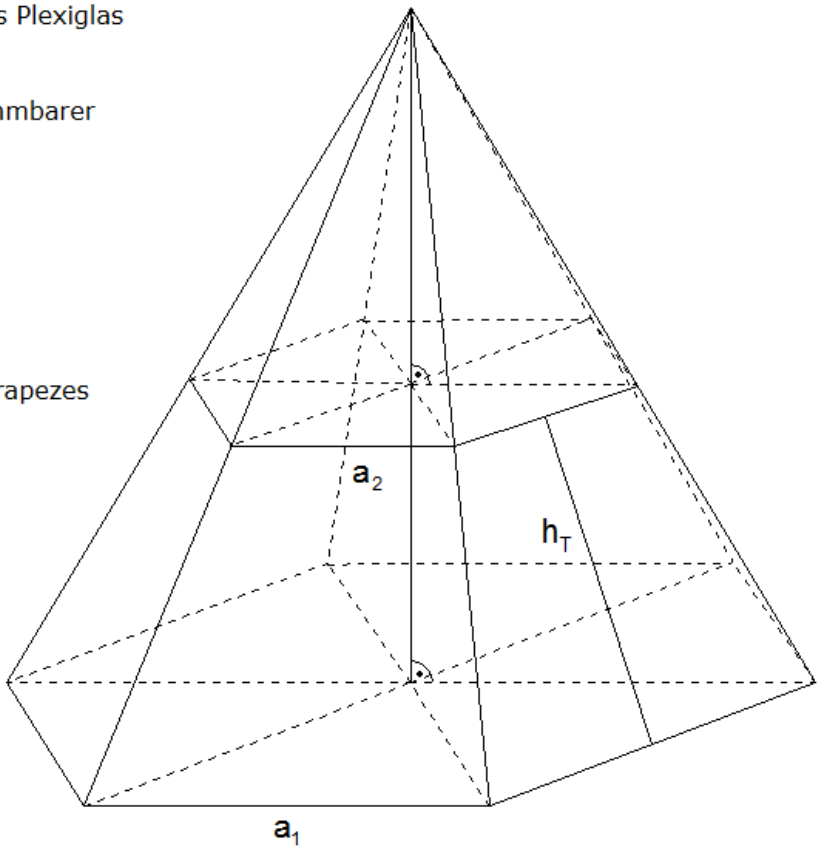
Aufgabe 1990 1b: 4 P

Eine Firma stellt Anschauungsmodelle aus Plexiglas für den Mathematikunterricht her.
Ein anderes Modell ist eine regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf mit abnehmbarer Ergänzungspyramide.
Vom Pyramidenstumpf ist bekannt:

Mantelfläche	$M = 444\,cm^2$
Grundkante	$a_1 = 11,0\,cm$
Deckkante	$a_2 = 6,4\,cm$

Berechnen Sie die Höhe h_T eines Seitentrapezes sowie die Höhe der Ergänzungspyramide.



Strategie 1990 1b:

Gegeben:

Regelmäßige sechsseitige Ergänzungspyramide
+ Regelmäßiger sechsseitiger Pyramidenstumpf

$M_{PyrSt} = 444\,cm^2$

$a_1 = 11,0\,cm$

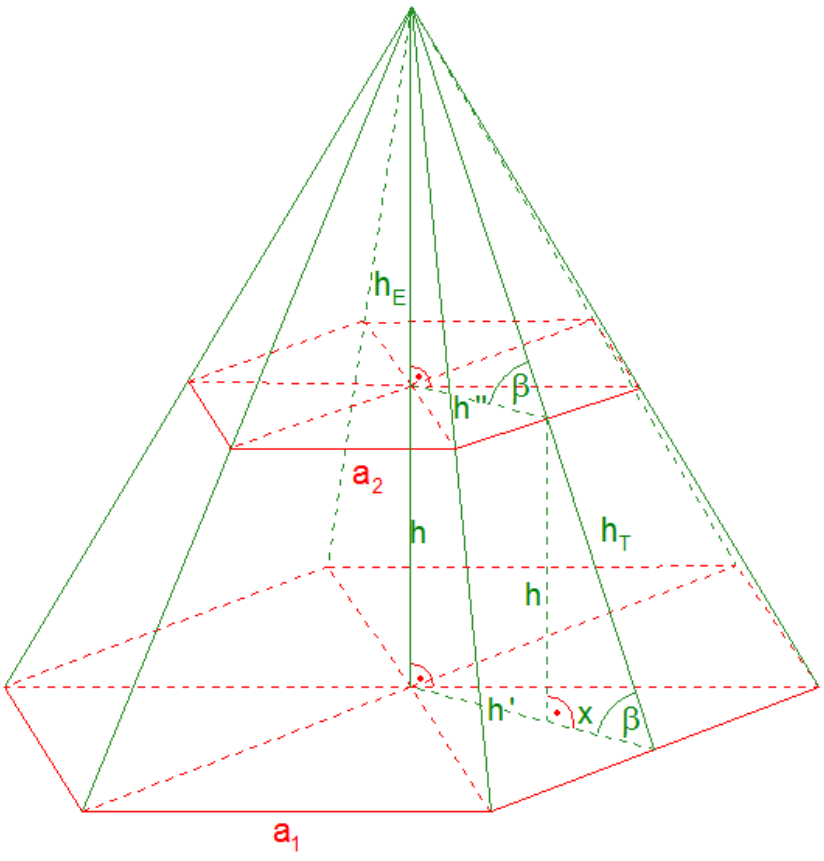
$a_2 = 6,4\,cm$

Gesucht:

h_T

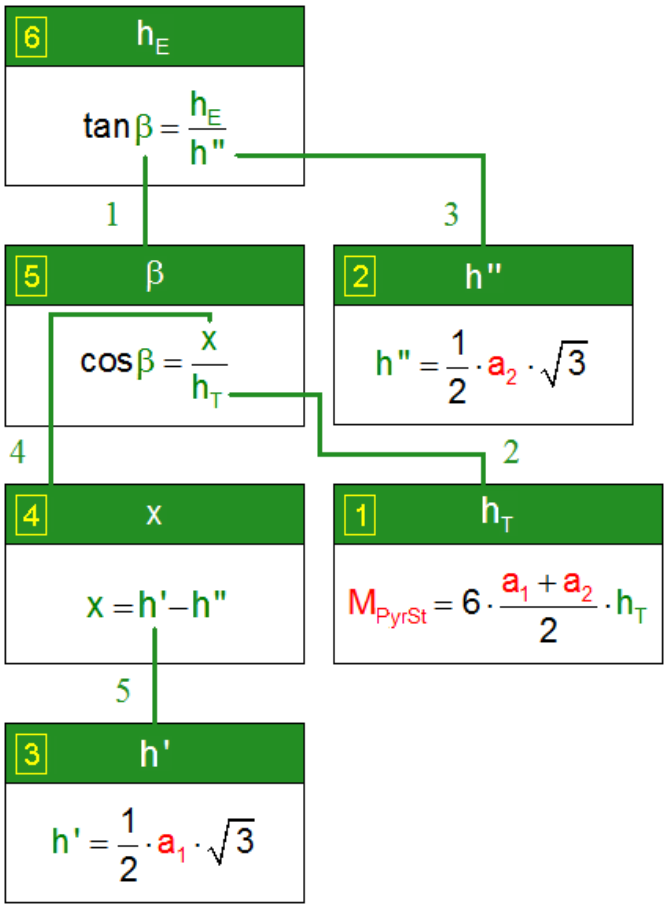
h_E

Skizze:



Strategie 1990 1b:

Struktogramm:



Lösung 1990 1b:

1. Berechnung der Seitenflächenhöhe h_T:

$$M_{PyrSt} = 6 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_T$$

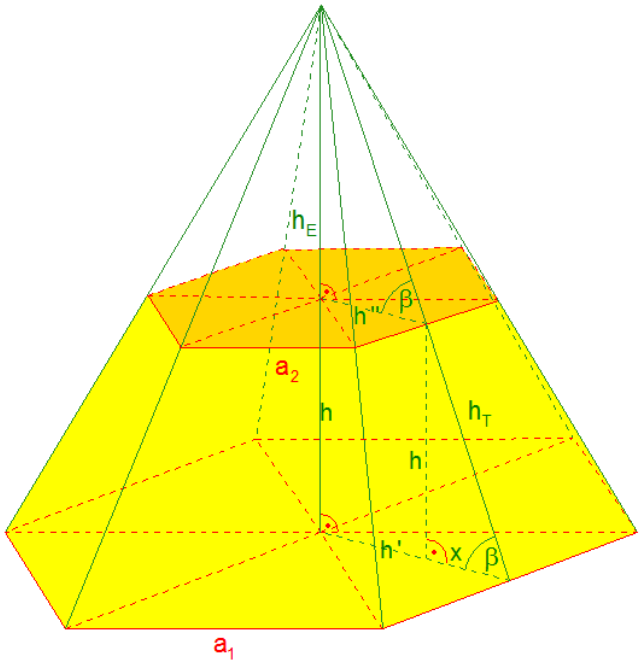
$$444 = 6 \cdot \frac{11 + 6,4}{2} \cdot h_T$$

$$444 = 3 \cdot 17,4 \cdot h_T$$

$$444 = 52,2 \cdot h_T \qquad \text{Seiten tauschen}$$

$$52,2 \cdot h_T = 444 \qquad |:52,2$$

$$h_T = 8,5\,cm$$



Lösung 1990 1b:

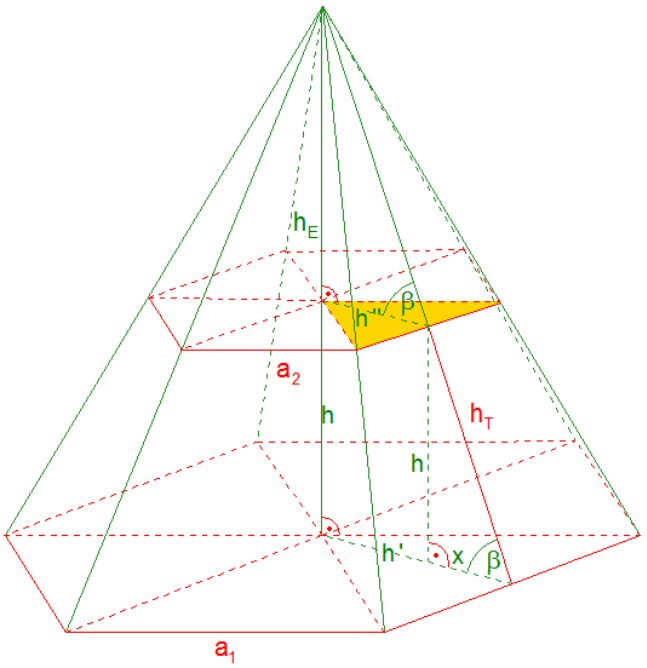
2. Berechnung der Dreieckshöhe h'':

$$h'' = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot \sqrt{3}$$ Formel Höhe gleichseitiges Dreieck

$$h'' = \frac{1}{2} \cdot 6,4 \cdot \sqrt{3}$$

$$h'' = 3,2 \cdot \sqrt{3}$$

$$h'' = 5,54\,cm$$



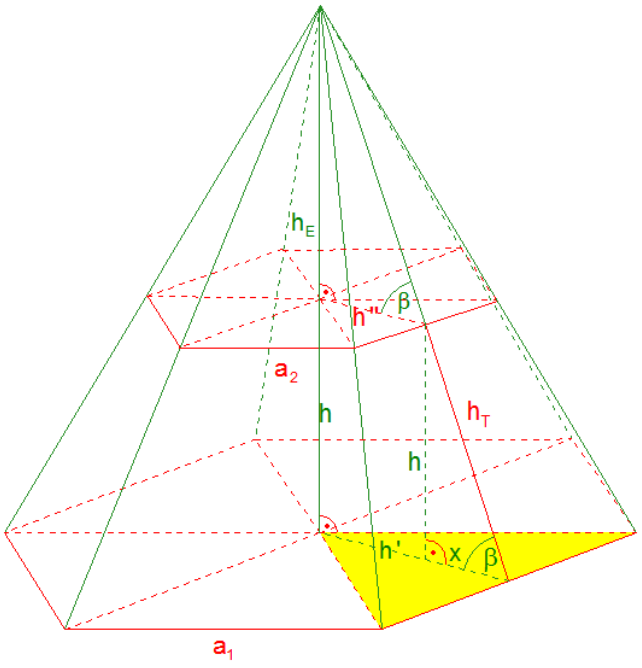
3. Berechnung der Dreieckshöhe h':

$$h' = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot \sqrt{3}$$ Formel Höhe gleichseitiges Dreieck

$$h' = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \sqrt{3}$$

$$h' = 5,5 \cdot \sqrt{3}$$

$$h' = 9,53\,cm$$

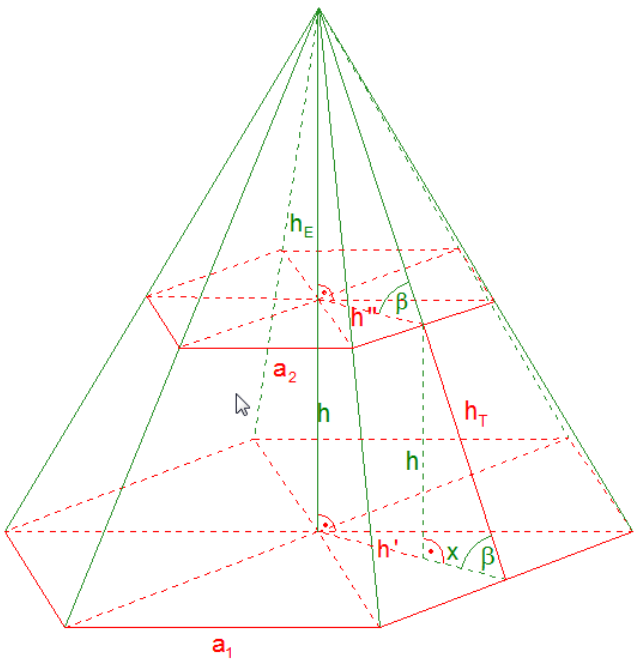


4. Berechnung der Höhendifferenz x:

$$x = h' - h''$$

$$x = 9,53 - 5,54$$

$$x = 3,99\,cm$$



Lösung 1990 1b:

5. Berechnung des Winkels β:

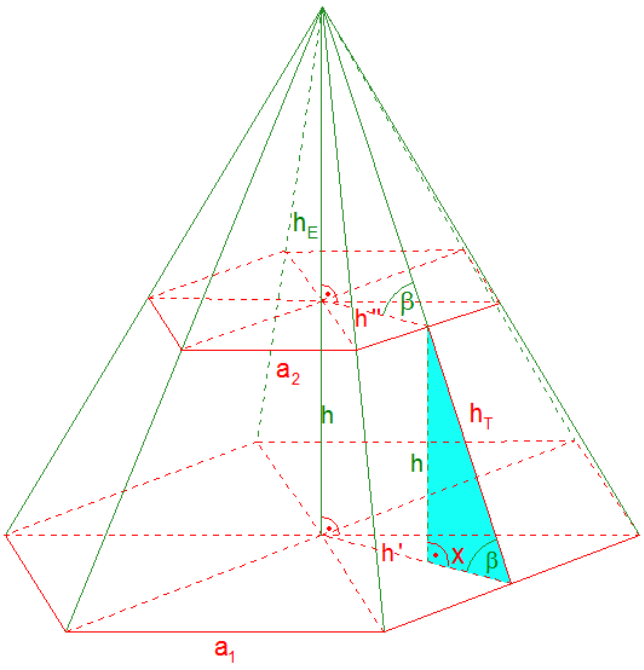
$$\cos\beta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{h_T}$$

Kosinusfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

$$\cos\beta = \frac{3,99}{8,5}$$

$$\cos\beta = 0,4694$$

$$\underline{\beta = 62^\circ}$$



6. Berechnung der Höhe der Ergänzungspyramide h_E:

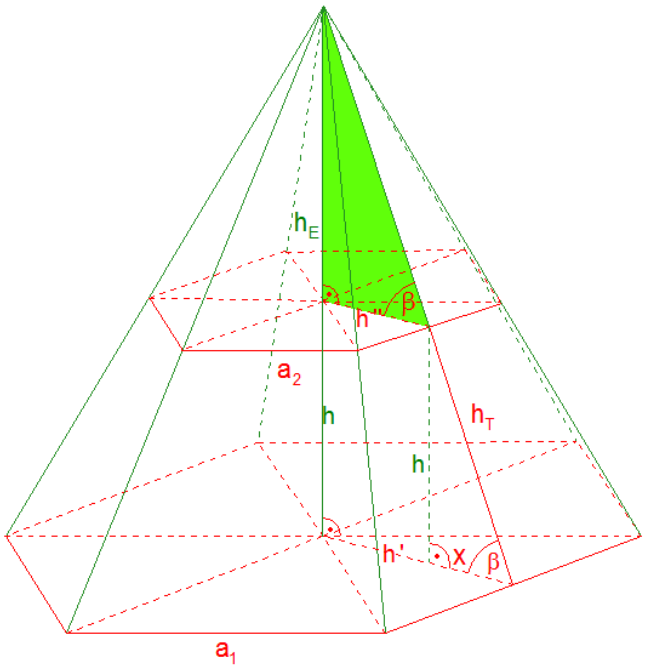
$$\tan\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h_E}{h''}$$

Tangensfunktion im rechtwinkligen grünen Teildreieck

$$\tan 62^\circ = \frac{h_E}{5,54}$$

$$1,8807 = \frac{h_E}{5,54}$$

Seiten tauschen

$$\frac{h_E}{5,54} = 1,8807 \qquad | \cdot 5,54$$

$$\underline{\underline{h_E = 10,4\text{cm}}}$$