Aufgabe 1989 1c: **3 P**

Zur Dekoration von Schaufenstern werden zwei verschiedene quadratische Pyramidenstümpfe aus Kunststoff hergestellt.

Typ I: Grundkante $12\,e$, Deckkante $9\,e$ und Körperhöhe e.
Zeigen Sie, dass das Volumen eines solchen Pyramidenstumpfes $V = 111\,e^3$ beträgt.

Typ II: Grundkante $9\,e$, Körperhöhe e und Volumen $V = 57\,e^3$.
Berechnen Sie die Deckkante in Abhängigkeit von e.

Lösung 1989 1c:

1. Berechnung des Volumens vom Typ I:

$$V_I = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(a_1^2 + \sqrt{a_1^2 \cdot a_2^2} + a_2^2\right)$$

$$V_I = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2\right)$$

$$V_I = \frac{1}{3} \cdot e \cdot \left((12e)^2 + 12e \cdot 9e + (9e)^2\right)$$

$$V_I = \frac{1}{3} \cdot e \cdot \left(144\,e^2 + 108\,e^2 + 81\,e^2\right)$$

$$V_I = \frac{1}{3} \cdot e \cdot 333\,e^2$$

$$\underline{\underline{V_I = 111\,e^3}}$$

2. Berechnung der Deckkante vom Typ II:

$$V_{II} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(a_1^2 + \sqrt{a_1^2 \cdot a_2^2} + a_2^2\right)$$

$$V_{II} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(a_1^2 + a_1 \cdot a_2 + a_2^2\right)$$

$$57\,e^3 = \frac{1}{3} \cdot e \cdot \left((9e)^2 + 9e \cdot a_2 + a_2^2\right)$$

$$57\,e^3 = \frac{1}{3} \cdot e \cdot \left(81\,e^2 + 9e \cdot a_2 + a_2^2\right) \qquad \Big| \cdot 3$$

$$171\,e^3 = e \cdot \left(81\,e^2 + 9e \cdot a_2 + a_2^2\right) \qquad \Big| : e$$

$$171\,e^2 = 81\,e^2 + 9e \cdot a_2 + a_2^2$$ Seiten tauschen

$$a_2^2 + 9e \cdot a_2 + 81\,e^2 = 171\,e^2 \qquad \Big| -171\,e^2$$

$$a_2^2 + 9e \cdot a_2 - 90\,e^2 = 0$$ Normalform einer quadratischen Gleichung

$$a_2^2 + 9e \cdot a_2 - 90\,e^2 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$ p und q bestimmen

Lösung 1989 1c:

$p = 9e$

$q = -90e^2$

$a_{2_{1,2}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ Lösungsformel

$a_{2_{1,2}} = -\frac{9e}{2} \pm \sqrt{\frac{(9e)^2}{4} - (-90e^2)}$

$a_{2_{1,2}} = -4,5e \pm \sqrt{\frac{81e^2}{4} + 90e^2}$

$a_{2_{1,2}} = -4,5e \pm \sqrt{20,25e^2 + 90e^2}$

$a_{2_{1,2}} = -4,5e \pm \sqrt{110,25e^2}$

$a_{2_{1,2}} = -4,5e \pm 10,5e$

$a_{2_1} = -4,5e + 10,5e$

$\underline{a_{2_1} = 6e}$

$a_{2_2} = -4,5e - 10,5e$

$a_{2_2} = \cancel{-15e}$ keine Lösung, da negativ

$\mathbb{L} = \{6e\}$