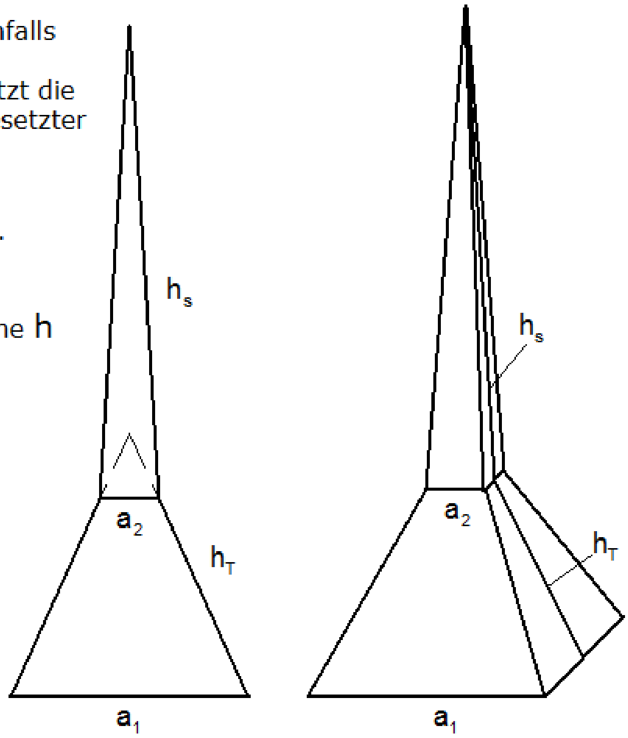
Aufgabe 1985 1b: **4 P**

Das Dach eines anderen Turmes hatte ursprünglich ebenfalls die Form einer quadratischen Pyramide. Es wurde durch Aufsetzen einer spitzeren Pyramide erhöht, so daß es jetzt die Form eines quadratischen Pyramidenstumpfes mit aufgesetzter quadratischer Pyramide hat (siehe Skizzen).
Die Höhen der Dachflächen sind $h_T = 5{,}75\,m$ und $h_s = 12{,}3\,m$; die gemeinsame Kante a_2 mißt $4{,}80\,m$.
Die Gesamtdachfläche ist $M = 291\,m^2$ groß.
Berechnen Sie die Länge der Grundkante a_1 und die Höhe h des ursprünglichen Daches.



Strategie 1985 1b:

Gegeben:

$h_T = 5{,}75\,m$

$h_s = 12{,}3\,m$

$a_2 = 4{,}80\,m$

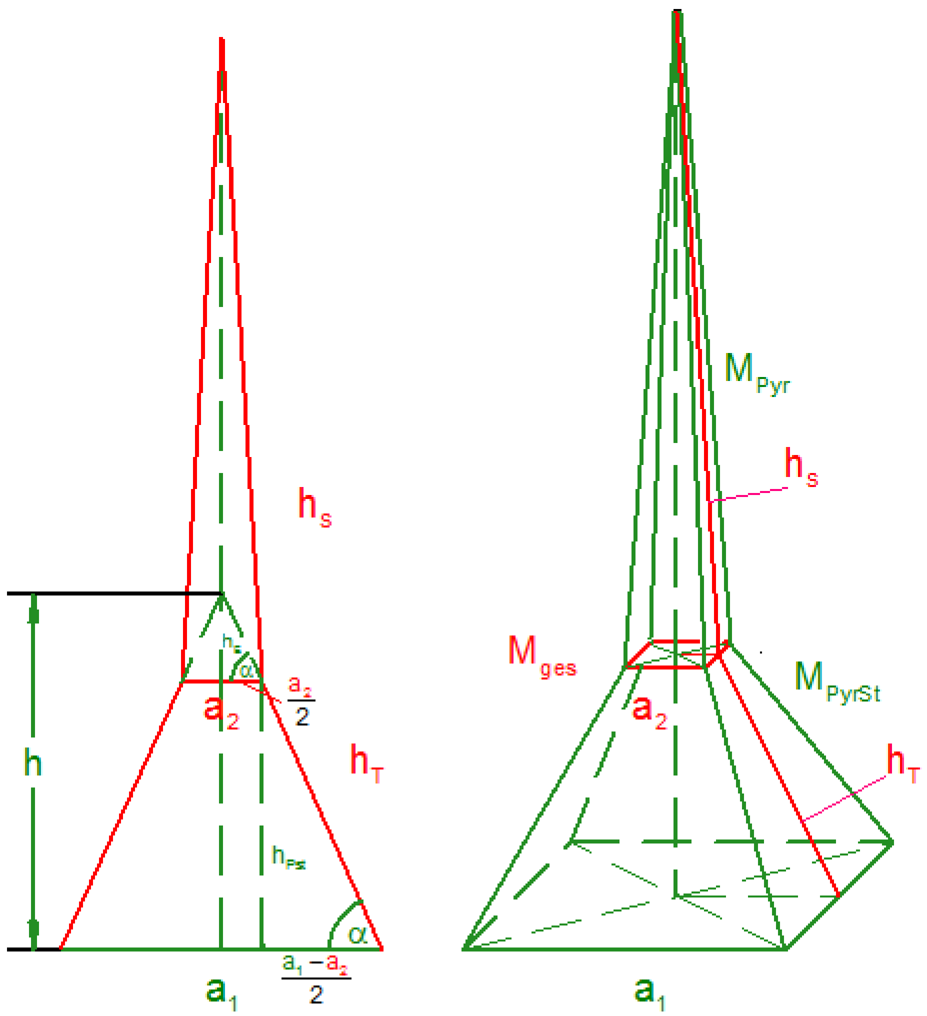
$M_{ges} = 291\,m^2$

Gesucht:

a_1

h

Skizze:



Strategie 1985 1b:

Struktogramm:

3	a_1	$4 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_T = M_{PyrSt}$
7	h	$h = h_E + h_{Pst}$
2	M_{PyrSt}	$M_{PyrSt} + M_{Pyr} = M_{ges}$
5	h_E	$\tan\alpha = \frac{h_E}{\frac{a_2}{2}}$
6	h_{Pst}	$\sin\alpha = \frac{h_{Pst}}{h_T}$
1	M_{Pyr}	$M_{Pyr} = 4 \cdot \frac{a_2 \cdot h_s}{2}$
4	α	$\cos\alpha = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2}}{h_T}$

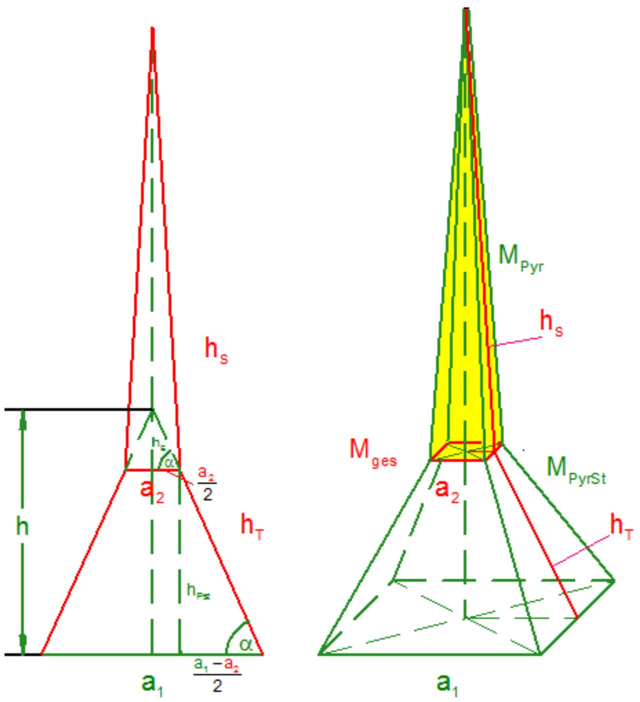
Lösung 1985 1b:

1. Berechnung des Pyramiden-Mantels M_{Pyr}:

$M_{Pyr} = 2 \cdot a_2 \cdot h_s$ Formel quadratischer Pyramidenmantel

$M_{Pyr} = 2 \cdot 4,8 \cdot 12,3$

$\underline{M_{Pyr} = 118,08\,m^2}$



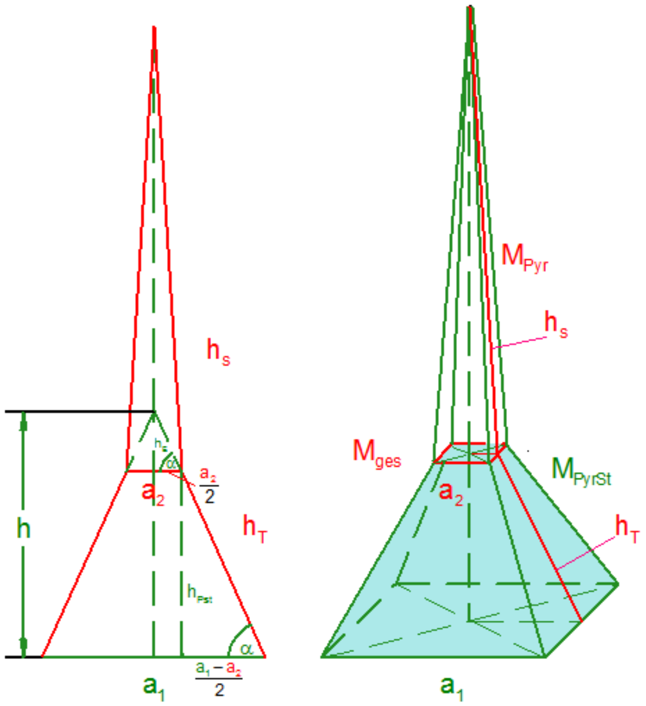
Lösung 1985 1b:

2. Berechnung des Pyramidenstumpf-Mantels M_{PyrSt}:

$$M_{PyrSt} + M_{Pyr} = M_{ges}$$

$$M_{PyrSt} + 118{,}08 = 291 \quad \vert -118{,}08$$

$$\underline{M_{PyrSt} = 172{,}92\,m^2}$$



3. Berechnung der Grundkante a_1:

$$4 \cdot A_{Trapez} = M_{PyrSt}$$

$$4 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot h_T = 172{,}92$$

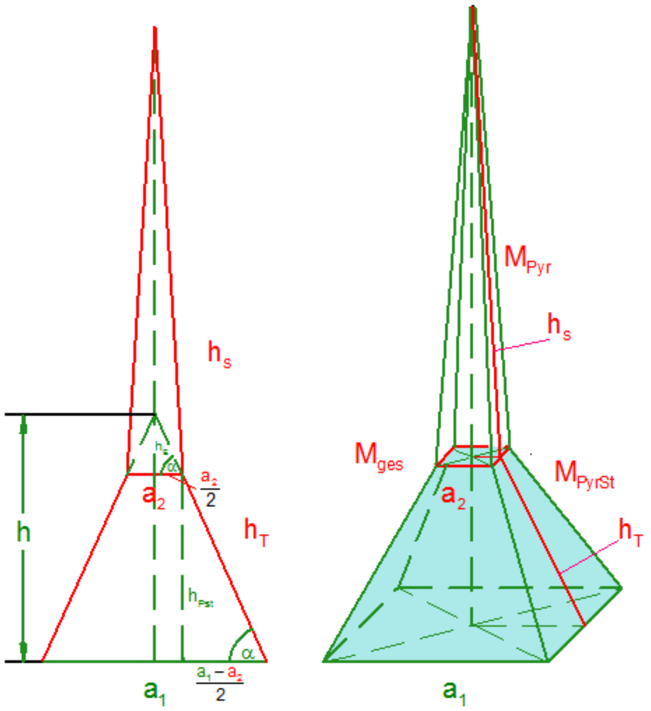
$$2 \cdot (a_1 + a_2) \cdot h_T = 172{,}92$$

$$2 \cdot (a_1 + 4{,}8) \cdot 5{,}75 = 172{,}92$$

$$(a_1 + 4{,}8) \cdot 11{,}5 = 172{,}92 \quad \vert : 11{,}5$$

$$a_1 + 4{,}8 = 15{,}04 \quad \vert -4{,}8$$

$$\underline{\underline{a_1 = 10{,}24\,m}}$$



Lösung 1985 1b:

4. Berechnung des Winkels α:

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a_1 - a_2}{2}}{h_T}$$

Kosinusfunktion im rechtwinkligen grünen Teildreieck

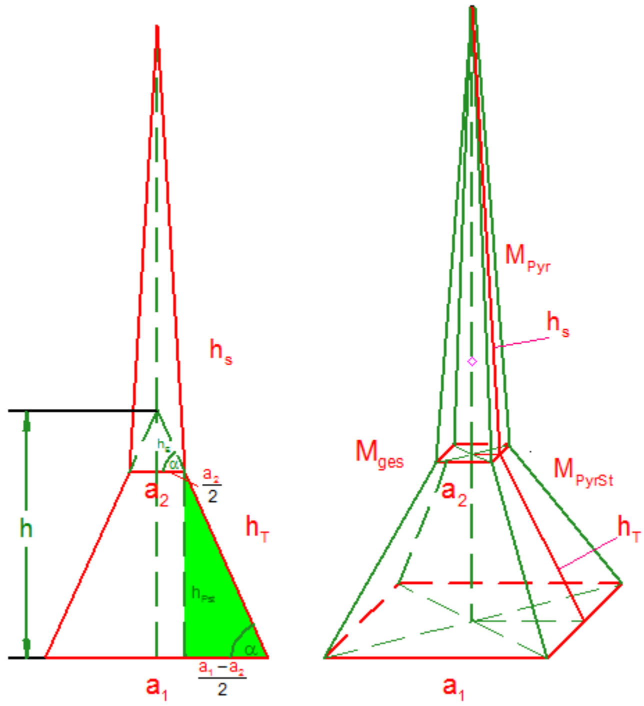
$$\cos\alpha = \frac{\frac{10,24 - 4,8}{2}}{5,75}$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{5,44}{2}}{5,75}$$

$$\cos\alpha = \frac{2,72}{5,75}$$

$$\cos\alpha = 0,4730$$

$$\underline{\alpha = 61,77^\circ}$$



5. Berechnung der Teilhöhe h_E:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h_E}{\frac{a_2}{2}}$$

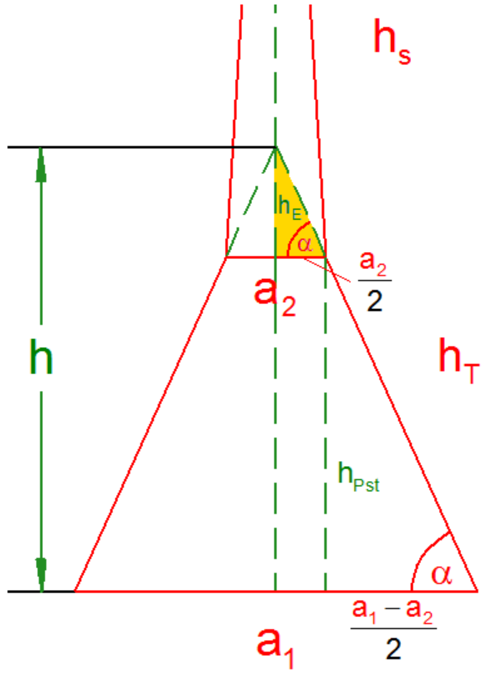
Tangensfunktion im rechtwinkligen orangefarbigen Teildreieck

$$\tan 61,77^\circ = \frac{h_E}{\frac{4,8}{2}}$$

$$1,8626 = \frac{h_E}{2,4} \qquad \text{Seiten tauschen}$$

$$\frac{h_E}{2,4} = 1,8626 \qquad | \cdot 2,4$$

$$\underline{h_E = 4,47\,\text{m}}$$



6. Berechnung der Teilhöhe h_{Pst}:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h_{Pst}}{h_T}$$

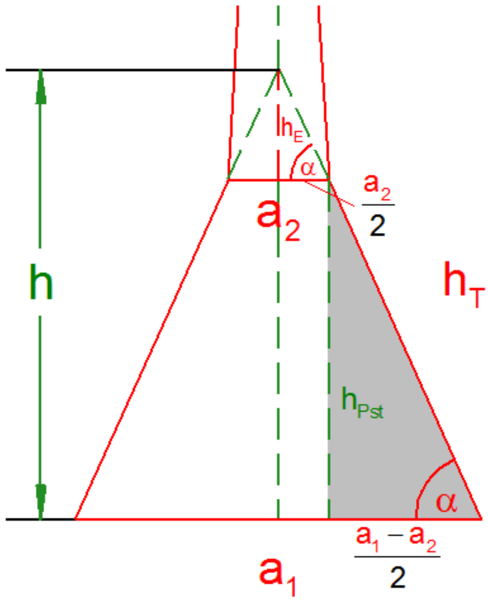
Sinusfunktion im rechtwinkligen hellgrauen Teildreieck

$$\sin 61,77^\circ = \frac{h_{Pst}}{5,75}$$

$$0,8811 = \frac{h_{Pst}}{5,75} \qquad \text{Seiten tauschen}$$

$$\frac{h_{Pst}}{5,75} = 0,8811 \qquad | \cdot 5,75$$

$$\underline{h_{Pst} = 5,07\,\text{m}}$$



Lösung 1985 1b:

7. Berechnung der Gesamthöhe h:

$$h = h_E + h_{Pst}$$

$$h = 4,47 + 5,07$$

$$\underline{\underline{h = 9,54\,m}}$$