

Aufgabe 1984 4b:

4 P

Ein Parallelogramm ABCD hat die Seitenlängen $\overline{AB} = 3a$ und $\overline{AD} = 2a$ sowie den Winkel $\angle BAD = \alpha$. Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt dieses Parallelogramms nach der Formel $A = 6a^2 \cdot \sin \alpha$ zu berechnen ist. Tabellieren Sie die Werte für den Flächeninhalt in Abhängigkeit von α in Schritten von 15° im Intervall $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ für $a = 1 \text{ cm}$. Stellen Sie diese Abhängigkeit in einem rechtwinkligen Koordinatensystem graphisch dar.

(Abszisse: Winkel α : $15^\circ \triangleq 1 \text{ cm}$; Ordinate: Fläche A : $1 \text{ cm}^2 \triangleq 1 \text{ cm}$.)

Entnehmen Sie der Zeichnung, für welche Werte von α der Flächeninhalt A den Wert $3,5 \text{ cm}^2$ annimmt. Kennzeichnen Sie diese Werte.

Bei welchem Wert von α ist der Flächeninhalt A am größten?

Wie heißt dann die Figur?

Strategie 1984 4b:

Gegeben:

Parallelogramm

$$\overline{AB} = 3a$$

$$\overline{AD} = 2a$$

$$\angle BAD = \alpha$$

Gesucht:

$$A = 6a^2 \cdot \sin \alpha$$

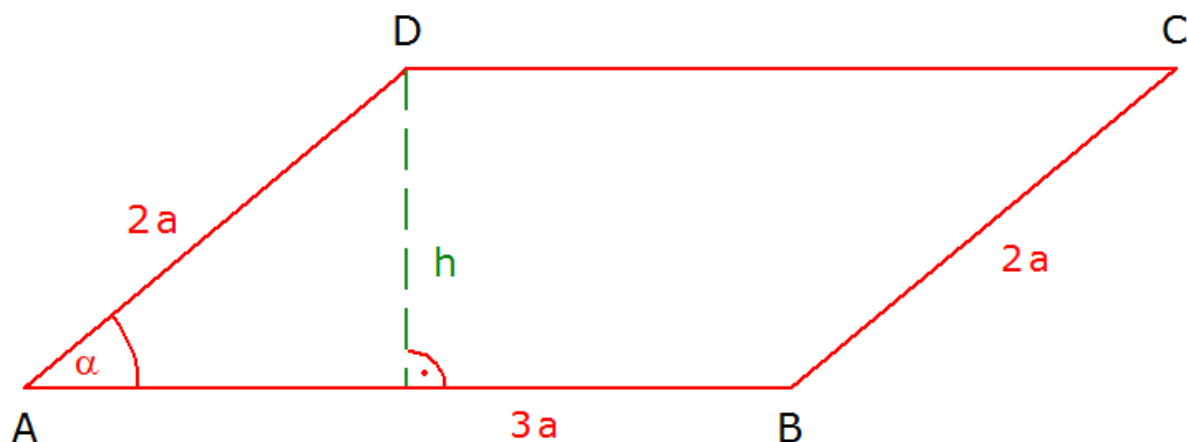
Tabelle

Koordinatensystem

$$\alpha \text{ für } A = 3,5 \text{ cm}^2$$

$$\alpha \text{ für } A \text{ am größten}$$

Skizze:



Lösung 1984 4b:

1. Berechnung der Flächenformel für $A(a, \alpha)$:

a) Berechnung der Flächengleichung:

$$A = 3a \cdot h$$

Formel
Fläche
Parallelogramm

$$I: A = 3a \cdot h$$

b) Berechnung der Höhe des Parallelogramms:

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{h}{2a}$$

Sinusfunktion im
rechtwinkligen
gelben
Teildreieck

$$\frac{h}{2a} = \sin \alpha$$

$\cdot 2a$

$$II: h = 2a \cdot \sin \alpha$$

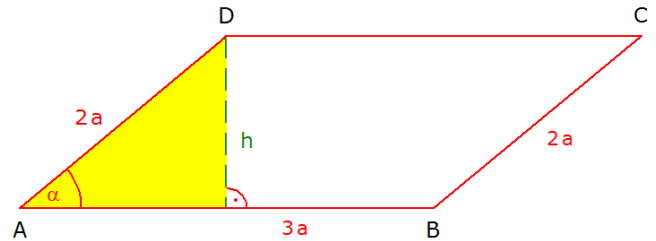
$$I: A = 3a \cdot h$$

$$II: h = 2a \cdot \sin \alpha$$

II in I einsetzen

$$A = 3a \cdot 2a \cdot \sin \alpha$$

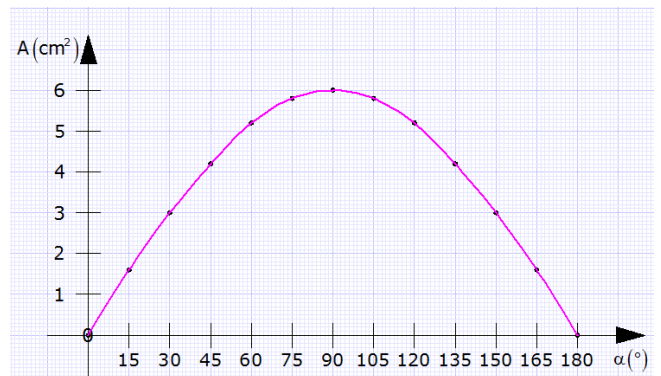
$$A = 6a^2 \cdot \sin \alpha \text{ (FE)}$$



2. Erstellung der Tabelle:

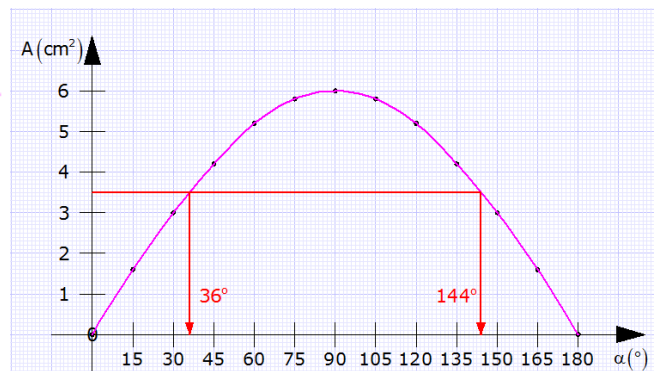
α	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$A [\text{cm}^2]$	0	1,6	3	4,2	5,2	5,8	6
α	105°	120°	135°	150°	165°	180°	
$A [\text{cm}^2]$	5,8	5,2	4,2	3	1,6	0	

3. Zeichnung im Koordinatensystem:



4. Wert von α für $A = 3,5 \text{ cm}^2$:

Antwort: Für $\alpha = 36^\circ$ bzw. $\alpha = 144^\circ$ ist die Fläche des Parallelogramms $A = 3,5 \text{ cm}^2$ groß.



Lösung 1984 4b:

5. Wert von α für maximales A :

Antwort: Für $\alpha = 90^\circ$ erhält man maximales A .
Das Parallelogramm nennt man dann **Rechteck**.

