

Aufgabe 1983 5b:

4 P

1. Für welche Werte von k hat die Gleichung
 $x^2 + 10x + 16 + k = 0$
zwei, eine bzw. keine reellen Lösungen?
2. Für welche Werte von k hat die Gleichung
 $x^2 - 3kx + 9k + 27 = 0$
nur eine (zusammenfallende) reelle Lösung?
Geben Sie die entsprechenden Gleichungen an.

Lösung 1983 5b:

1. Berechnung von k ($x^2 + 10x + 16 + k = 0$):

$$x^2 + 10x + 16 + k = 0$$

Quadratische Gleichung
in der Normalform

$$x^2 + 10x + 16 + k = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = 10$$

$$q = 16 + k$$

p und q bestimmen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{10^2}{4} - (16 + k)}$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 16 - k}$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25 - 16 - k}$$

$$x_{1,2} = -5 \pm \sqrt{9 - k}$$

$$D = 9 - k$$

Zwei Lösungen, wenn

$$D > 0$$

$$9 - k > 0 \quad | +k$$

$$9 > k \vee \underline{\underline{k < 9}}$$

Eine Lösung, wenn

$$D = 0$$

$$9 - k = 0 \quad | +k$$

$$9 = k \vee \underline{\underline{k = 9}}$$

Keine Lösung, wenn

$$D < 0$$

$$9 - k < 0 \quad | +k$$

$$9 < k \vee \underline{\underline{k > 9}}$$

Lösung 1983 5b:

2. Berechnung von k ($x^2 - 3kx + 9k + 27 = 0$):

$$x^2 - 3kx + 9k + 27 = 0$$

Quadratische Gleichung in der Normalform

$$x^2 - 3kx + 9k + 27 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = -3k$$

$$q = 9k + 27$$

p und q bestimmen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{-3k}{2} \pm \sqrt{\frac{(-3k)^2}{4} - (9k + 27)}$$

$$x_{1,2} = 1,5k \pm \sqrt{\frac{9k^2}{4} - 9k - 27}$$

$$x_{1,2} = 1,5k \pm \sqrt{2,25k^2 - 9k - 27}$$

$$D = 2,25k^2 - 9k - 27$$

Eine Lösung, wenn $D = 0$

$$2,25k^2 - 9k - 27 = 0$$

$$| : 2,25$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = -4$$

$$q = -12$$

p und q bestimmen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} - (-12)}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} + 12}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + 12}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{16}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm 4$$

$$x_1 = 2 + 4 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{k_1 = 6}}$$

$$x_2 = 2 - 4 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{k_2 = -2}}$$

$$x^2 - 3kx + 9k + 27 = 0 \quad \wedge \quad k = 6$$

$$x^2 - 3 \cdot 6x + 9 \cdot 6 + 27 = 0$$

$$x^2 - 18x + 54 + 27 = 0$$

$$\underline{\underline{x^2 - 18x + 81 = 0}}$$

$$x^2 - 3kx + 9k + 27 = 0 \quad \wedge \quad k = -2$$

$$x^2 - 3 \cdot (-2)x + 9 \cdot (-2) + 27 = 0$$

$$x^2 + 6x - 18 + 27 = 0$$

$$\underline{\underline{x^2 + 6x + 9 = 0}}$$