Aufgabe 1981 7b:

4 P

Bei einer anderen arithmetischen Reihe gilt $a_3 + a_7 = a_6$.

Die Summe der ersten acht Glieder dieser Reihe beträgt 10.

Wie groß sind a_1 und d ?

Berechnen Sie die Anzahl der Glieder dieser Reihe für $s_n = 75$.

Lösung 1981 7b:

1. Berechnung von a_1 in Abhängigkeit von d :

$$a_3 + a_7 = a_6$$

$$a_1 + 2d + a_1 + 6d = a_1 + 5d$$

$$2a_1 + 8d = a_1 + 5d \quad | - a_1$$

$$a_1 + 8d = 5d \quad | - 8d$$

$$\underline{a_1 = -3d}$$

2. Berechnung von d :

$$s_8 = 10$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 10$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) + (a_1 + 6d) + (a_1 + 7d) = 10$$

$$8 \cdot a_1 + 28d = 10$$

$$8 \cdot (-3d) + 28d = 10$$

$$-24d + 28d = 10$$

$$4d = 10$$

| : 4

$$\underline{d = 2,5}$$

3. Berechnung von a_1 :

$$a_1 = -3d$$

$$a_1 = (-3) \cdot 2,5$$

$$\underline{a_1 = -7,5}$$

Lösung 1981 7b:

4. Berechnung von n für $s_n = 75$:

$$s_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d] \quad s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$\wedge a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$s_n = \frac{n}{2} [2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d]$$

$$75 = \frac{n}{2} [2 \cdot (-7,5) + (n-1) \cdot 2,5]$$

$$75 = \frac{n}{2} [-15 + 2,5n - 2,5]$$

$$75 = \frac{n}{2} [2,5n - 17,5] \quad | \cdot 2$$

$$150 = n[2,5n - 17,5] \quad \text{Summe ausmultiplizieren}$$

$$150 = 2,5n^2 - 17,5n \quad \text{Seiten tauschen}$$

$$2,5n^2 - 17,5n = 150 \quad | -150$$

$$2,5n^2 - 17,5n - 150 = 0 \quad | : 2,5$$

$$n^2 - 7n - 60 = 0$$

Normalform einer quadratischen Gleichung

$$n^2 - 7n - 60 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

p und q bestimmen

$$p = -7$$

$$q = -60$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\frac{(-7)^2}{4} - (-60)}$$

$$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{\frac{49}{4} + 60}$$

$$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{12,25 + 60}$$

$$x_{1,2} = 3,5 \pm \sqrt{72,25}$$

$$x_{1,2} = 3,5 \pm 8,5$$

$$x_1 = 3,5 + 8,5$$

$$\underline{x_1 = 12}$$

$$x_2 = 3,5 - 8,5$$

$$\del{x_2 = -5}$$

keine Lösung, da negativ

$$\underline{\underline{n = 12}}$$