

Aufgabe 1981 1c:

3 P

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ist ein Parallelogramm $A''B''C''D''$ durch die Koordinaten seiner Eckpunkte $A''(1|0)$, $B''(3|0)$, $C''(a+2|4)$ und $D''(a|4)$ mit $a > 1$ gegeben.

Dieses Parallelogramm rotiert um die y-Achse.

Berechnen Sie das Volumen V_R des Rotationskörpers in Abhängigkeit von a als Vielfaches von π .

Wie groß ist a für $V_R = 40\pi \text{ cm}^3$?

Strategie 1981 1c:

Gegeben:

Rotationskörper

$A''(1|0)$

$B''(3|0)$

$C''(a+2|4)$

$D''(a|4)$

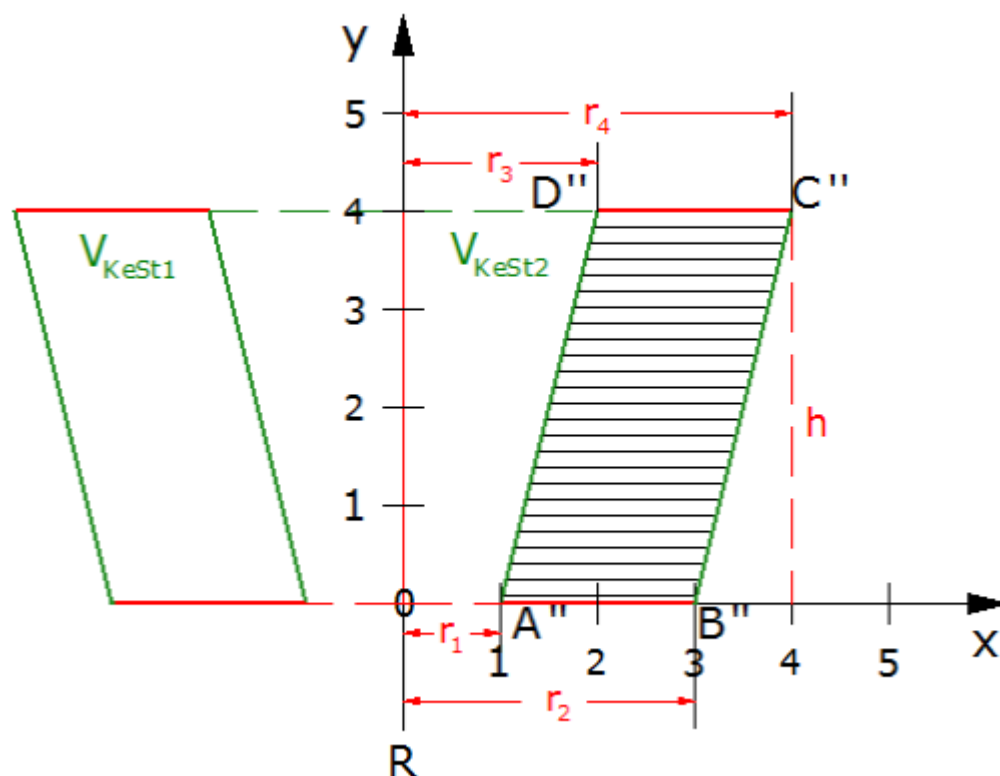
$a > 1$

Gesucht:

V_R

a

Skizze:



Lösung 1981 1c:

1. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{KeSt1} :

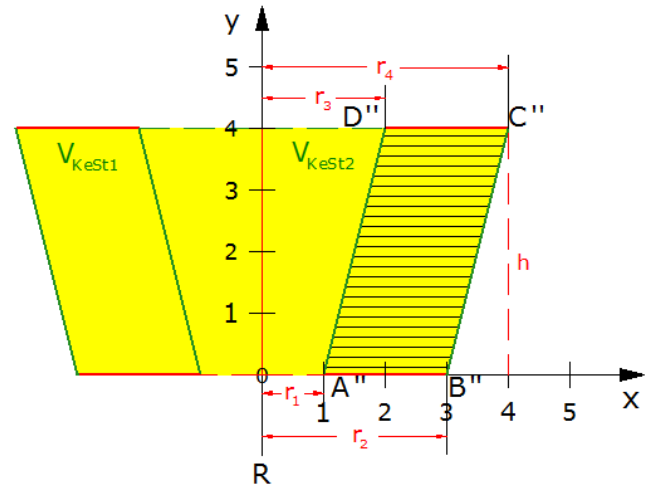
$$V_{\text{KeSt1}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r_4^2 + r_4 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$V_{\text{KeSt1}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot ((a+2)^2 + (a+2) \cdot 3 + 3^2)$$

$$V_{\text{KeSt1}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (a^2 + 4a + 4 + 3a + 6 + 9)$$

$$V_{\text{KeSt1}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (a^2 + 7a + 19)$$

$$V_{\text{KeSt1}} = \frac{4\pi}{3} \cdot a^2 + \frac{4\pi}{3} \cdot 7a + \frac{4\pi}{3} \cdot 19$$



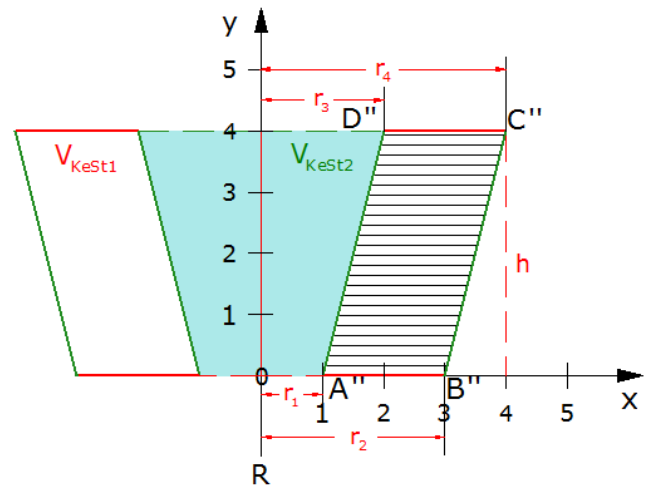
2. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{KeSt2} :

$$V_{\text{KeSt2}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r_3^2 + r_3 \cdot r_1 + r_1^2)$$

$$V_{\text{KeSt2}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (a^2 + a \cdot 1 + 1^2)$$

$$V_{\text{KeSt2}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (a^2 + a + 1)$$

$$V_{\text{KeSt2}} = \frac{4\pi}{3} \cdot a^2 + \frac{4\pi}{3} \cdot a + \frac{4\pi}{3}$$



3. Berechnung des Rotationskörpervolumens V_R :

$$V_R = V_{\text{KeSt1}} - V_{\text{KeSt2}}$$

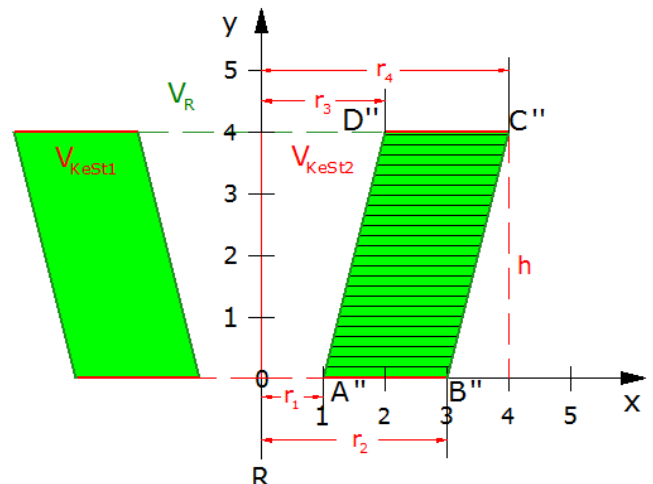
$$V_R = \frac{4\pi}{3} \cdot a^2 + \frac{4\pi}{3} \cdot 7a + \frac{4\pi}{3} \cdot 19 - \left(\frac{4\pi}{3} \cdot a^2 + \frac{4\pi}{3} \cdot a + \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$V_R = \frac{4\pi}{3} \cdot a^2 + \frac{4\pi}{3} \cdot 7a + \frac{4\pi}{3} \cdot 19 - \frac{4\pi}{3} \cdot a^2 - \frac{4\pi}{3} \cdot a - \frac{4\pi}{3}$$

$$V_R = \frac{4\pi}{3} \cdot 6a + \frac{4\pi}{3} \cdot 18$$

$$V_R = 8\pi \cdot a + 24\pi$$

$$V_R = 8\pi(a+3) \text{ cm}^3$$



4. Berechnung von a für $V_R = 40\pi \text{ cm}^3$:

$$8\pi(a+3) = 40\pi \quad | : 8\pi$$

$$a+3 = 5 \quad | - 3$$

$$a = 2 \text{ cm}$$