

Aufgabe 1980 3d:

3 P

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) ist das Dreieck ABC durch die Punkte $A(0|0)$, $B(4|e)$ und $C(0|3)$ mit $0 < e < 3$ gegeben.

Das Dreieck rotiert erstens um die x-Achse und zweitens um die y-Achse.

Berechnen Sie die Volumen V_x und V_y als Vielfaches von π .

Für welchen Wert von e gilt $V_x = V_y$?

Strategie 1980 3d:

Gegeben:

$A(0|0)$

$B(4|e)$

$C(0|3)$

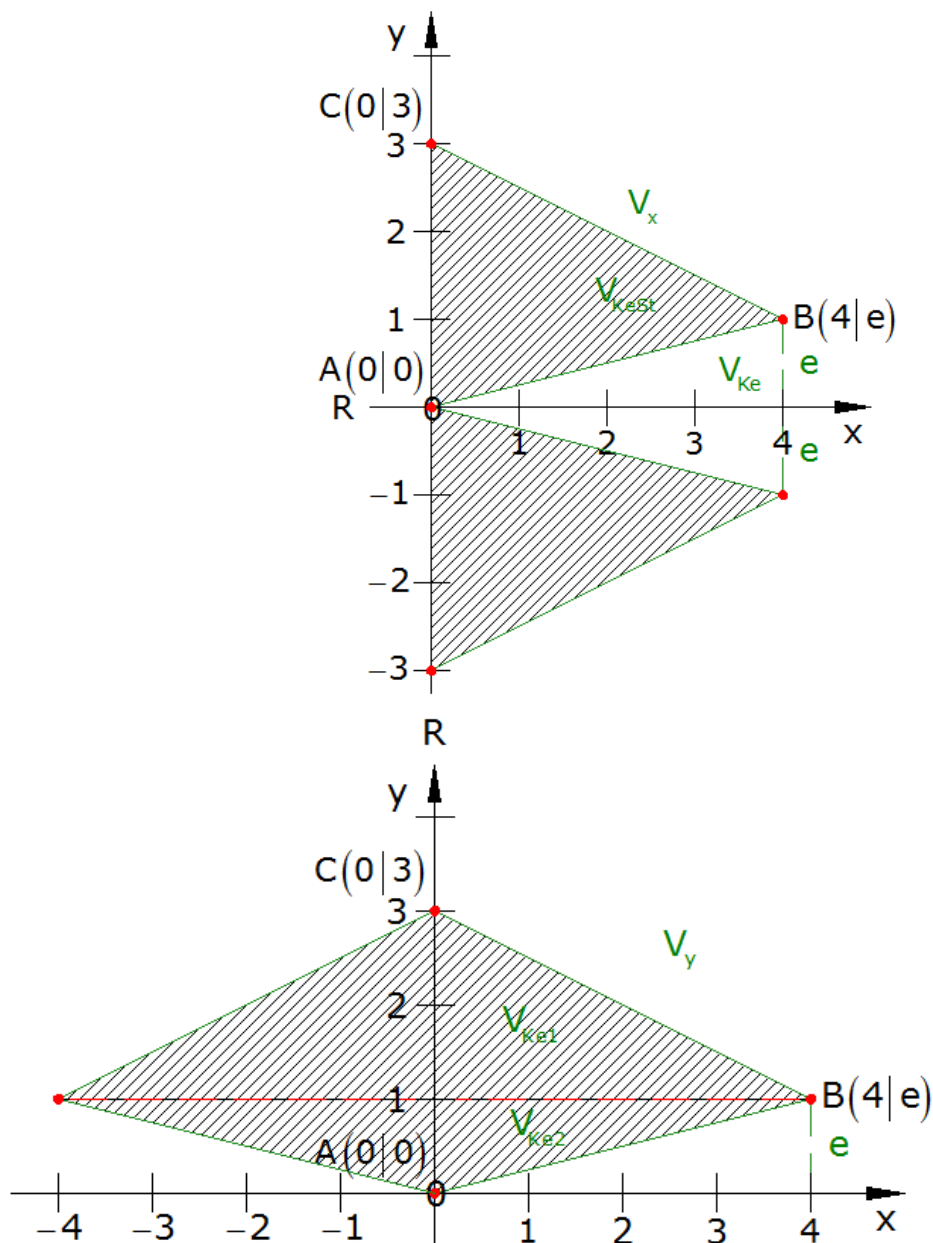
$0 < e < 3$

Gesucht:

V_x

V_y

Skizze:



Lösung 1980 3d:

1. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{KeSt} :

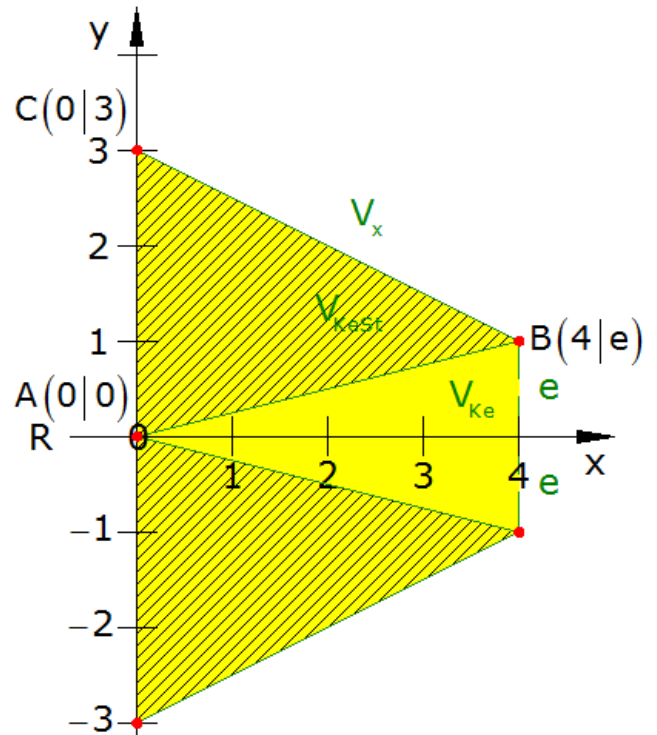
$$V_{\text{KeSt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$V_{\text{KeSt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (3^2 + 3 \cdot e + e^2)$$

$$V_{\text{KeSt}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4 \cdot (9 + 3e + e^2)$$

$$V_{\text{KeSt}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (e^2 + 3e + 9)$$

$$V_{\text{KeSt}} = \frac{4}{3} \pi e^2 + 4\pi e + 12\pi$$

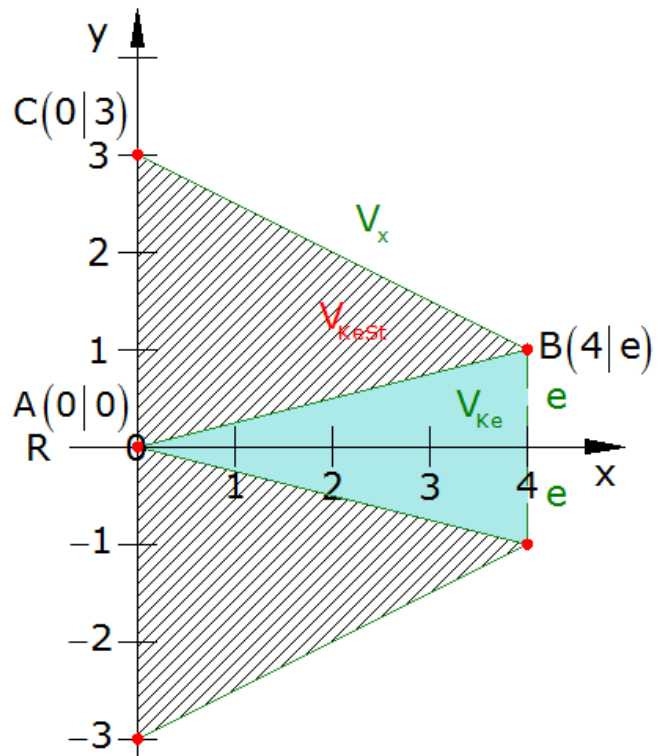


2. Berechnung des Kegelvolumens V_{Ke} :

$$V_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{Ke}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot e^2 \cdot 4$$

$$V_{\text{Ke}} = \frac{4}{3} \pi e^2$$



Lösung 1980 3d:

3. Berechnung des Rotationskörpervolumens V_x :

$$V_x = V_{\text{KeSt}} - V_{\text{Ke}}$$

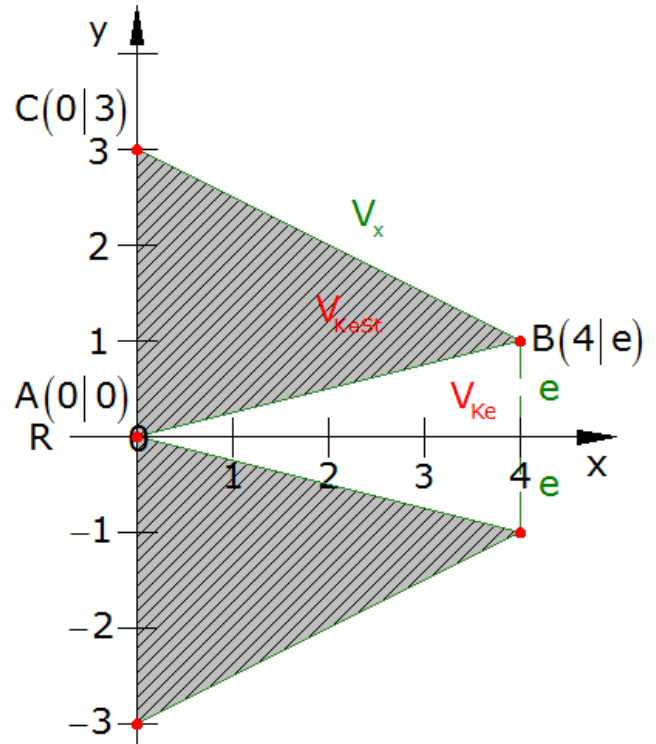
$$V_x = \frac{4}{3}\pi e^2 + 4\pi e + 12\pi - \frac{4}{3}\pi e^2$$

$$V_x = 4\pi e + 12\pi$$

$$V_x = 4\pi \cdot e + 4\pi \cdot 3$$

$$V_x = 4\pi(e + 3) \text{ cm}^3$$

gemeinsame Faktoren
ausklammern



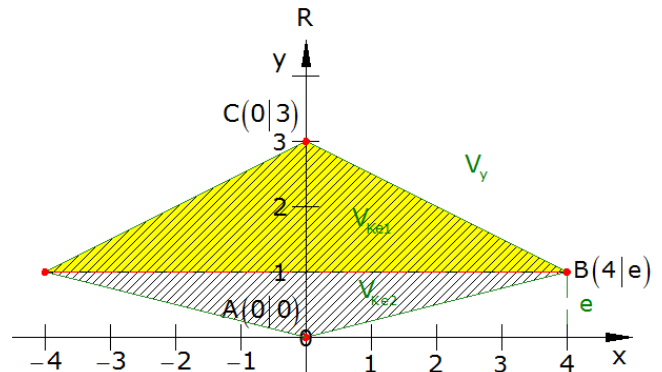
4. Berechnung des Kegelvolumens V_{Ke1} :

$$V_{\text{Ke1}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{Ke1}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot (3 - e)$$

$$V_{\text{Ke1}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 16 \cdot (3 - e)$$

$$V_{\text{Ke1}} = 16\pi - \frac{1}{3}\pi \cdot 16e$$

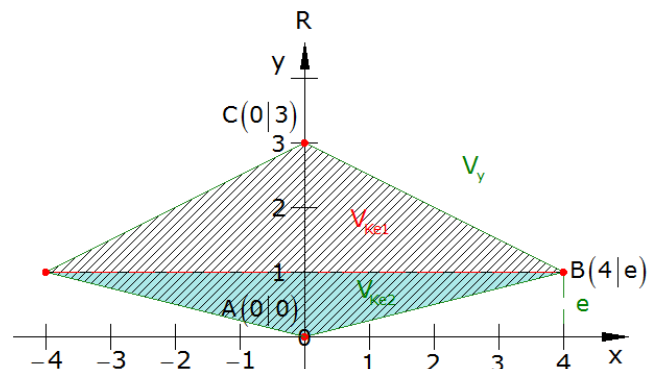


5. Berechnung des Kegelvolumens V_{Ke2} :

$$V_{\text{Ke2}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{\text{Ke2}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot e$$

$$V_{\text{Ke2}} = \frac{1}{3}\pi \cdot 16e$$



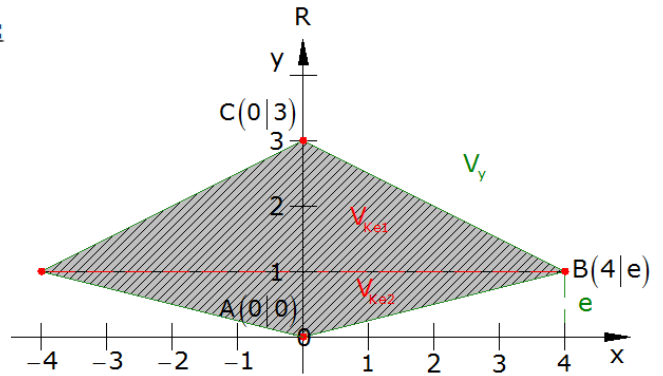
Lösung 1980 3d:

6. Berechnung des Rotationskörpervolumens V_y :

$$V_y = V_{ke1} + V_{ke2}$$

$$V_y = 16\pi - \frac{1}{3}\pi \cdot 16e + \frac{1}{3}\pi \cdot 16e$$

$$\underline{\underline{V_y = 16\pi \text{ cm}^3}}$$



7. Berechnung von e für $V_x = V_y$:

$$4\pi(e + 3) = 16\pi \quad | : 4\pi$$

$$e + 3 = 4 \quad | - 3$$

$$\underline{\underline{e = 1 \text{ cm}}}$$