Aufgabe 1979 4c: **3 P**

Ein Dreieck ABC ist in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) durch $A(0|0)$, $B(6|0)$, $C(3|e)$ festgelegt, wobei $e > 0$ gilt.
Das Dreieck rotiert 1. um die x-Achse und 2. um die y-Achse.
Welchen Zahlenwert müsste e annehmen, damit die entstandenen Rotationskörper denselben Rauminhalt aufweisen?

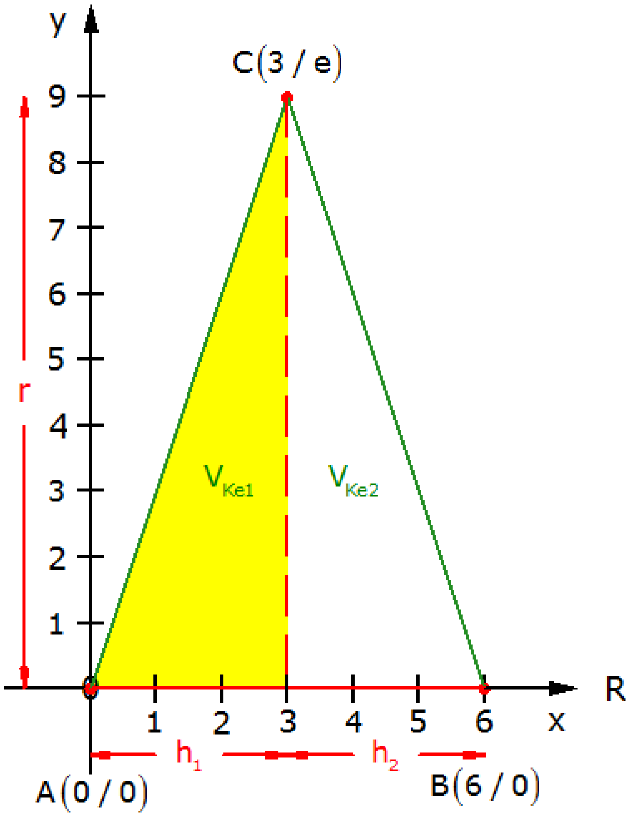
Lösung 1979 4c:

1. Berechnung des Kegelvolumens V_{Ke1}:

$$V_{Ke1} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h_1$$

$$V_{Ke1} = \frac{\pi}{3} \cdot e^2 \cdot 3 \qquad r = e \wedge h_1 = 3$$

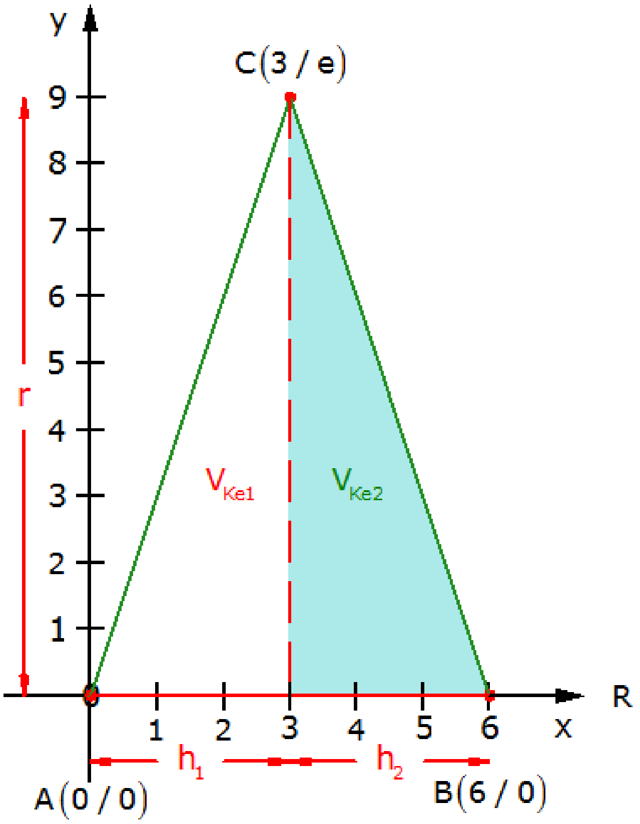
$$\underline{V_{Ke1} = \pi e^2 \text{ VE}}$$



2. Berechnung des Kegelvolumens V_{Ke2}:

$$V_{Ke2} = V_{Ke1}$$

$$\underline{V_{Ke2} = \pi e^2 \text{ VE}}$$



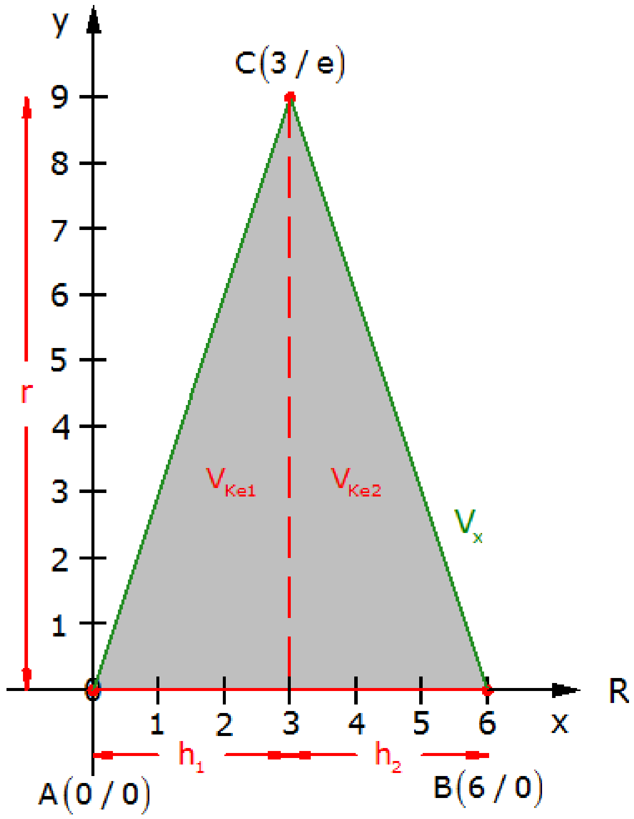
Lösung 1979 4c:

3. Berechnung des Rotationskörpervolumens V_x:

$V_x = V_{Ke1} + V_{Ke2}$

$V_x = \pi e^2 + \pi e^2$

$V_x = 2\pi e^2$ VE



4. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{KeSt}:

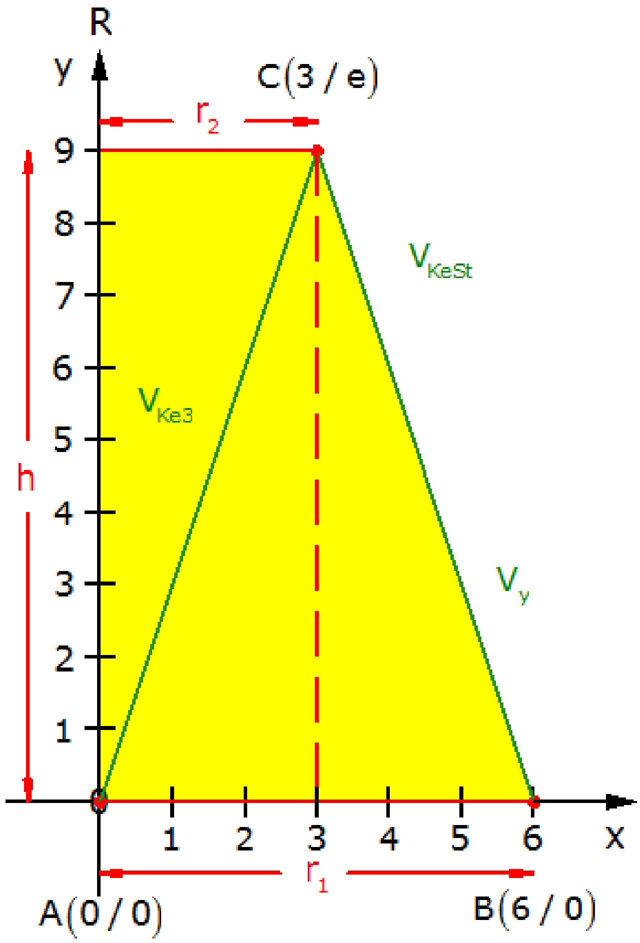
$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$

$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot e \cdot (6^2 + 6 \cdot 3 + 3^2)$ $\quad r_1 = 6 \wedge r_2 = 3 \wedge h = e$

$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot e \cdot (36 + 18 + 9)$

$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot e \cdot 63$

$V_{KeSt} = 21\pi e$ VE



Lösung 1979 4c:

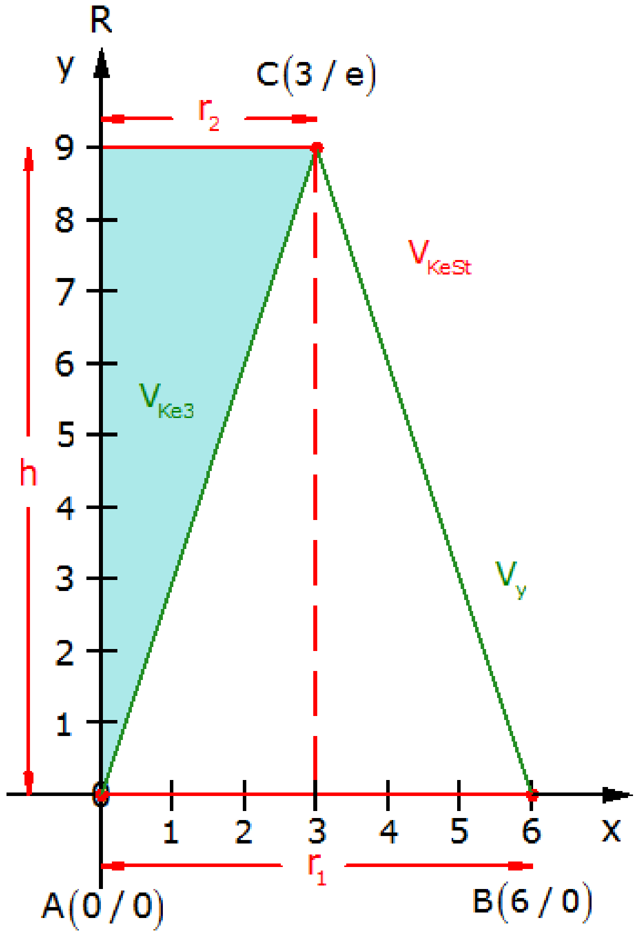
5. Berechnung des Kegelvolumens V_{Ke3}:

$$V_{Ke3} = \frac{\pi}{3} \cdot r_2^2 \cdot h$$

$$V_{Ke3} = \frac{\pi}{3} \cdot 3^2 \cdot e \qquad r_2 = 3 \wedge h = e$$

$$V_{Ke3} = \frac{\pi}{3} \cdot 9 \cdot e$$

$$\underline{V_{Ke3} = 3\pi e \text{ VE}}$$

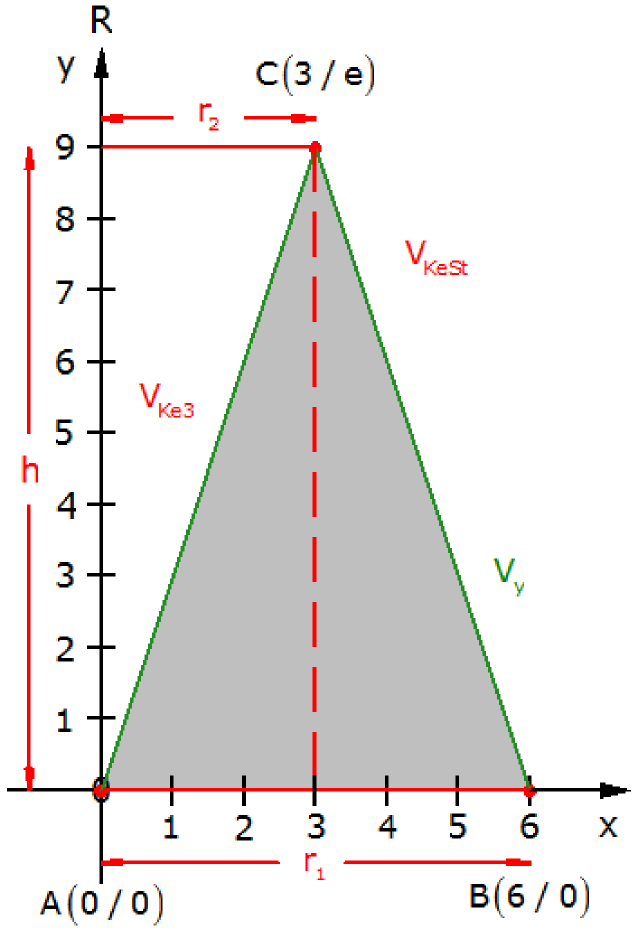


6. Berechnung des Rotationskörpervolumens V_y:

$$V_y = V_{KeSt} - V_{Ke3}$$

$$V_y = 21\pi e - 3\pi e$$

$$\underline{\underline{V_y = 18\pi e \text{ VE}}}$$



Lösung 1979 4c:

7. Berechnung von e für $V_x = V_y$:

$V_x = V_y$

$2\pi e^2 = 18\pi e \quad |:2\pi$

$e^2 = 9e \quad | -9e$

$e^2 - 9e = 0$

$e(e-9) = 0$

$e_1 - 9 = 0 \quad |+9$

$\underline{e_1 = 9}$

$\cancel{e_2 = 0}$ keine Lösung, da $e > 0$

$\underline{\underline{e = 9 LE}}$