

Aufgabe 1978 6c:

3 P

Einem quadratischen Prisma mit $a = 5 \text{ cm}$ und der Höhe h wird eine Kugel umschrieben. Leiten Sie eine Formel für die Oberfläche dieser Kugel in Abhängigkeit von h her. In welchem Verhältnis stehen die Oberflächen des Prismas und der Kugel für $h = 11 \text{ cm}$?

Geben Sie das Verhältnis in der Form $O_P : O_K = 1 : \dots$ an.

Strategie 1978 6c:

Gegeben:

Quadratisches Prisma

$a = 5 \text{ cm}$

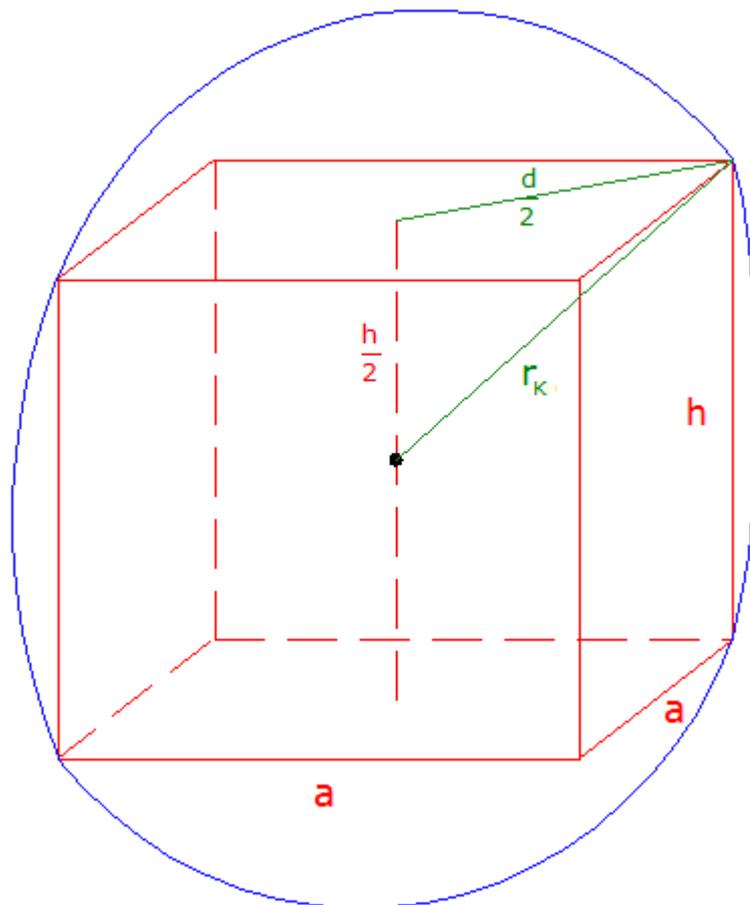
$h = 11 \text{ cm}$

Gesucht:

O_K

$O_P : O_K = 1 : \dots$

Skizze:



Lösung 1978 6c:

1. Berechnung des Kugelradius r_K :

$$r_K^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{Pythagoras im rechtwinkligen gelben Dreieck}$$

$$r_K^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

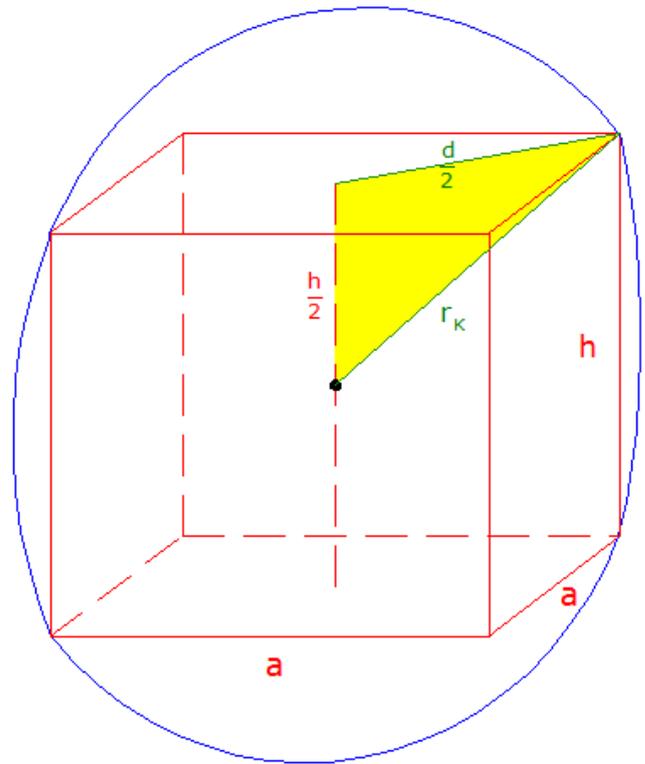
$$r_K^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{a^2}{2}$$

$$r_K^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{5^2}{2}$$

$$r_K^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{25}{2}$$

$$r_K^2 = \frac{h^2}{4} + \frac{50}{4}$$

$$r_K^2 = \frac{h^2 + 50}{4}$$



2. Berechnung der Kugeloberfläche O_K :

$$O_K = 4 \cdot \pi \cdot r_K^2$$

$$O_K = 4 \cdot \pi \cdot \frac{h^2 + 50}{4}$$

$$O_K = \pi \cdot (h^2 + 50)$$

3. Berechnung der Kugeloberfläche für $h = 11 \text{ cm}$:

$$O_K = \pi \cdot (h^2 + 50)$$

$$O_K = \pi \cdot (11^2 + 50)$$

$$O_K = \pi \cdot (121 + 50)$$

$$O_K = \pi \cdot 171$$

$$O_K = 537,2 \text{ cm}^2$$

4. Berechnung der Prismaoberfläche:

$$O_p = 2 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot h$$

$$O_p = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 11$$

$$O_p = 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 \cdot 11$$

$$O_p = 50 + 220$$

$$O_p = 270 \text{ cm}^2$$

Lösung 1978 6c:

5. Berechnung des Oberflächenverhältnisses:

$$O_p : O_K = 270 : 537,2$$

$$\underline{\underline{O_p : O_K = 1 : 1,99}}$$