

Aufgabe 1978 5c:

3 P

Ein Viereck hat in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (Längeneinheit 1 cm) die Eckpunkte $A(0|0)$, $B(a|0)$, $C(6|3)$ und $D(0|7,5)$; $a > 0$.

Berechnen Sie das Volumen des Drehkörpers, den man durch Drehung der Figur um die y-Achse erhält, in Abhängigkeit von a.

Welche Form hat dieser Drehkörper, wenn 1.) a zwischen 6 und 10 liegt,

2.) a gleich 6 und 3.) a = 0 ist?

Welchen Wert hat a, wenn das Volumen des Drehkörpers $V_y = 162\pi$ VE beträgt?

Lösung 1978 5c:

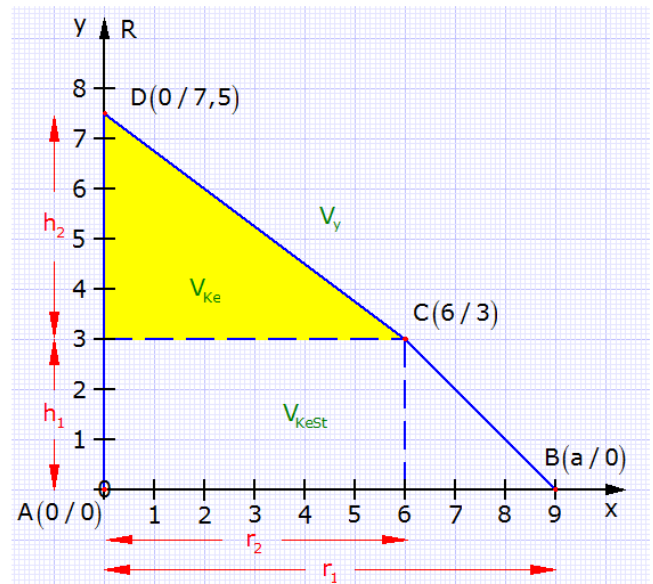
1. Berechnung des Kegelvolumens V_{Ke} :

$$V_{Ke} = \frac{\pi}{3} \cdot r_2^2 \cdot h_2$$

$$V_{Ke} = \frac{\pi}{3} \cdot 6^2 \cdot 4,5$$

$$V_{Ke} = \frac{\pi}{3} \cdot 36 \cdot 4,5$$

$$\underline{V_{Ke} = 54\pi \text{ cm}^3}$$

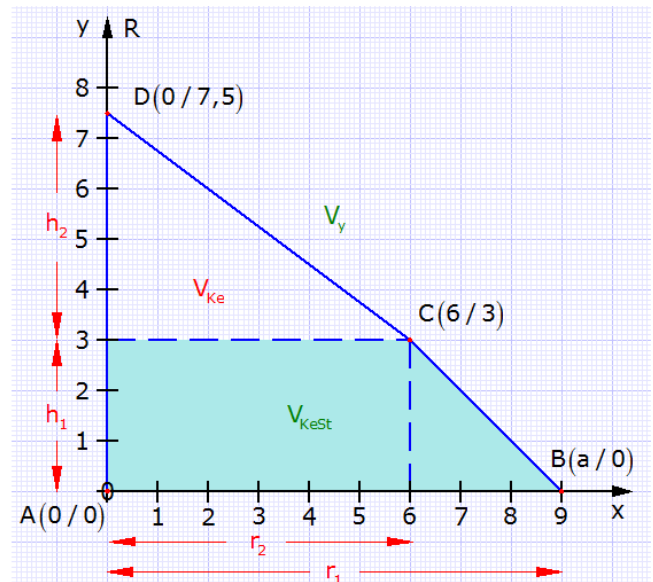


2. Berechnung des Kegelstumpfvolumens V_{KeSt} :

$$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot h_1 \cdot (r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2)$$

$$V_{KeSt} = \frac{\pi}{3} \cdot 3 \cdot (a^2 + a \cdot 6 + 6^2)$$

$$\underline{V_{KeSt} = \pi \cdot (a^2 + 6a + 36) \text{ VE}}$$



Lösung 1978 5c:

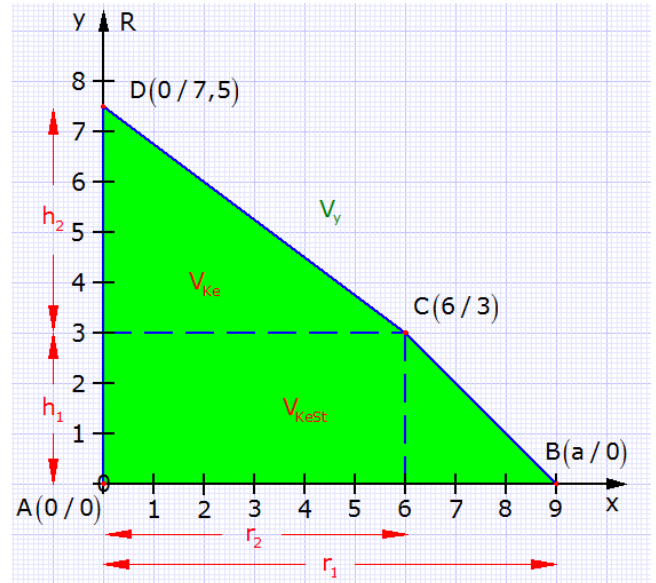
3. Berechnung des Rotationskörpervolumens V_y :

$$V_y = V_{Ke} + V_{KeSt}$$

$$V_y = 54\pi + \pi \cdot (a^2 + 6a + 36)$$

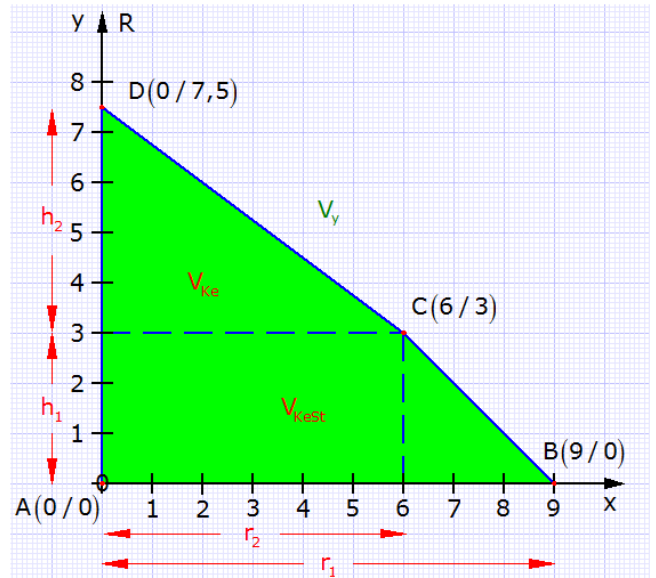
$$V_y = \pi \cdot (54 + a^2 + 6a + 36)$$

$$\underline{\underline{V_y = (a^2 + 6a + 90)\pi}}$$

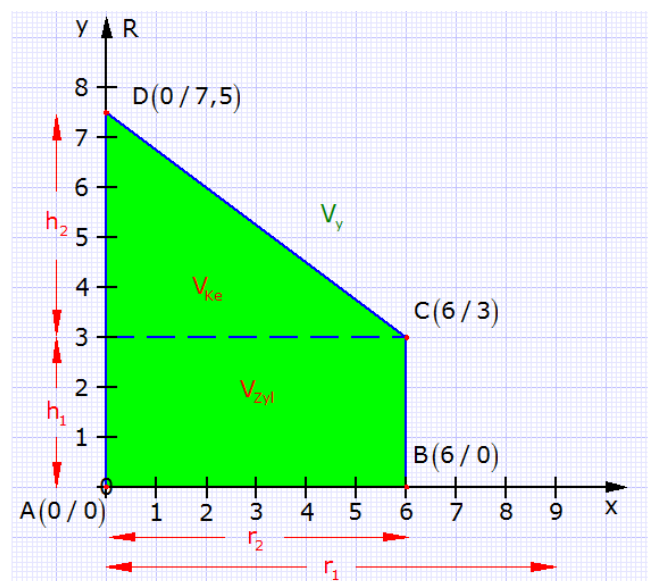


4. Formenbetrachtung:

$6 < a < 10$ Kegelstumpf + Kegel

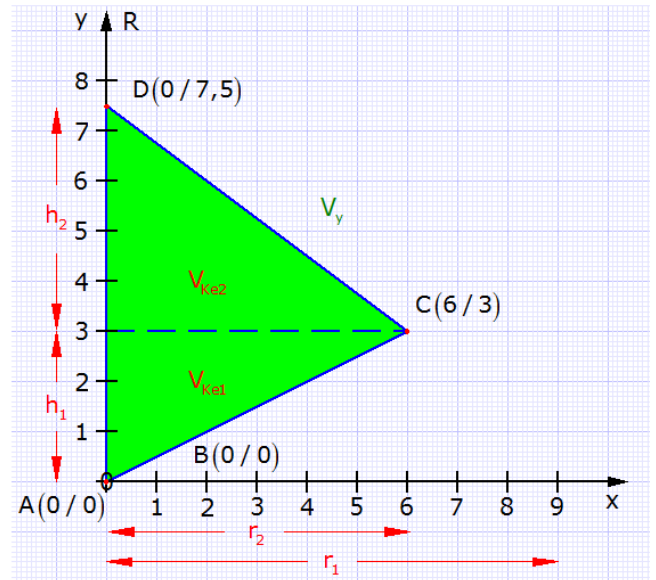


$a = 6$ Zylinder + Kegel



Lösung 1978 5c:

$a = 0$ Doppelkegel



5. Berechnung von a für $V_y = 162\pi$ VE:

$$(a^2 + 6a + 90)\pi = 162\pi \quad | : \pi$$

$$a^2 + 6a + 90 = 162 \quad | -162$$

$$a^2 + 6a - 72 = 0$$

Normalform einer
quadratischen
Gleichung

$$a^2 + 6a - 72 = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

p und q
bestimmen

$$p = 6$$

$$q = -72$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{Lösungsformel}$$

$$x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - (-72)}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{\frac{36}{4} + 72}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 72}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{81}$$

$$x_{1,2} = -3 \pm 9$$

$$x_1 = -3 + 9$$

$$\underline{x_1 = 6}$$

$$x_2 = -3 - 9$$

$$\cancel{x_2 = -12}$$

keine Lösung,
da negativ

$$\underline{\underline{a = 6 \text{ LE}}}$$