

**Aufgabe 1977 6d:**

**3 P**

Einer Kugel mit dem Volumen  $V = 4,5\pi e^3 \text{ cm}^3$  soll eine quadratische Pyramide umbeschrieben werden, deren Achsenschnitt parallel zu einer Grundkante ein gleichseitiges Dreieck darstellt. Wie groß sind in Abhängigkeit von  $e$  der Radius  $r$  der Kugel und die Grundkante  $a$  der Pyramide?

Welchen Wert nimmt  $e$  an, wenn das Volumen der Pyramide  $324 \text{ cm}^3$  beträgt?

**Strategie 1977 6d:**

**Gegeben:**

Quadratische Pyramide

$$V_{\text{Ku}} = 4,5\pi e^3 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Pyr}} = 324 \text{ cm}^3$$

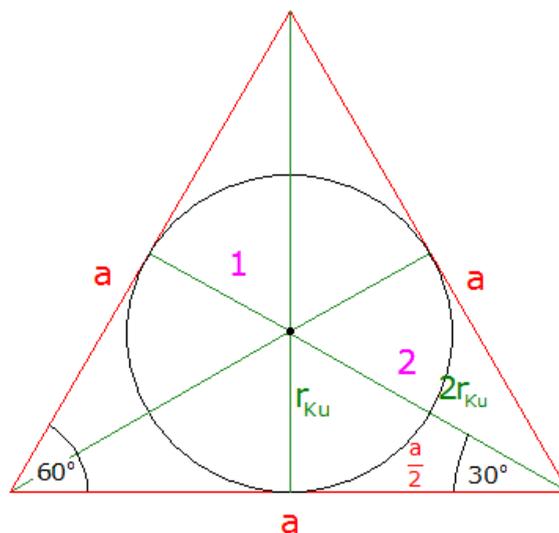
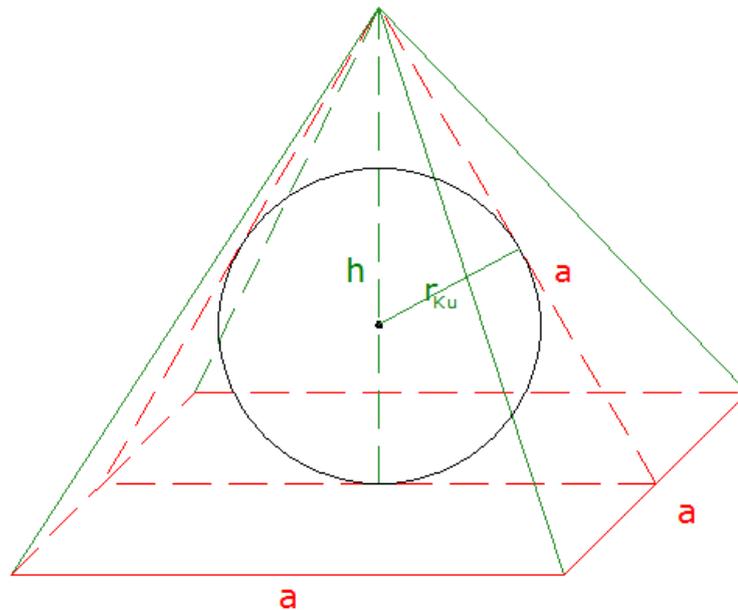
**Gesucht:**

$r_{\text{Ku}}$

$a$

$e$

**Skizze:**



**Lösung 1977 6d:**

**1. Berechnung des Kugelradius  $r_{Ku}$ :**

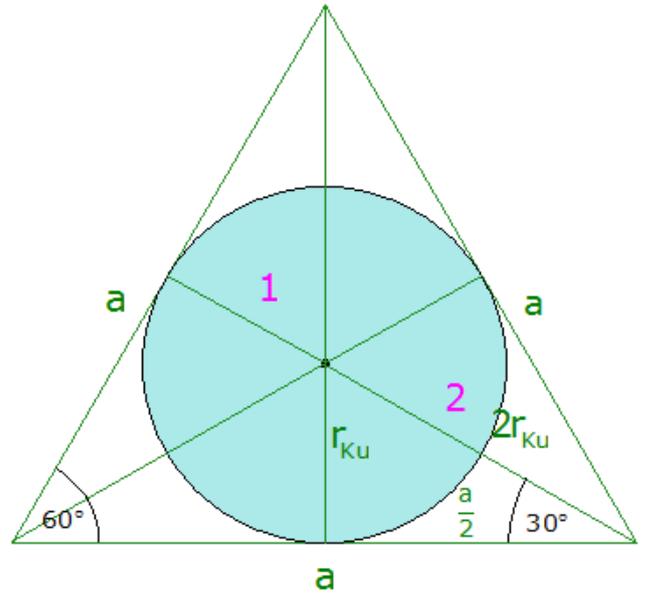
$$V_{Ku} = 4,5 \cdot \pi \cdot e^3 \quad V_{Ku} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{Ku}^3$$

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{Ku}^3 = 4,5 \cdot \pi \cdot e^3 \quad | : \pi$$

$$\frac{4}{3} \cdot r_{Ku}^3 = 4,5 \cdot e^3 \quad | \cdot \frac{3}{4}$$

$$r_{Ku}^3 = 3,375e^3 \quad \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$\underline{\underline{r_{Ku} = 1,5e \text{ cm}}}$$



**2. Berechnung der Pyramidengrundkante a:**

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + r_{Ku}^2 = (2 \cdot r_{Ku})^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$\frac{a^2}{4} + (1,5e)^2 = (3e)^2$$

$$\frac{a^2}{4} + 2,25e^2 = 9e^2 \quad | - 2,25e^2$$

$$\frac{a^2}{4} = 6,75e^2 \quad | \cdot 4$$

$$a^2 = 27e^2 \quad | \sqrt{\phantom{x}}$$

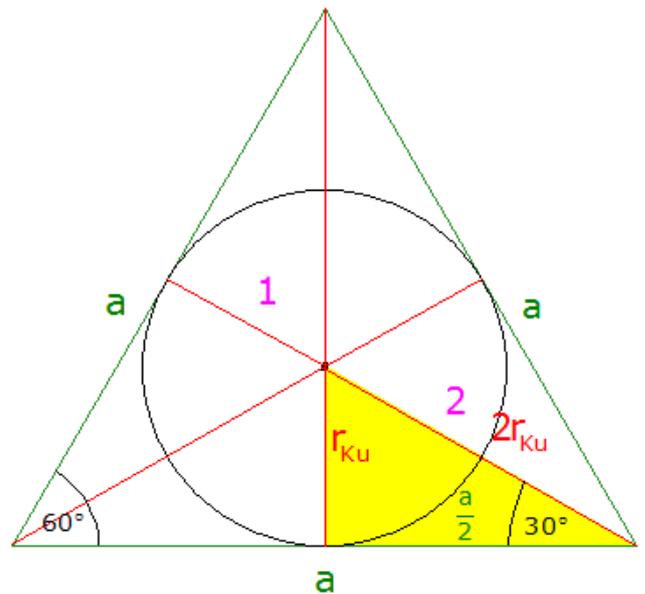
$$a = \sqrt{27e^2}$$

$$a = \sqrt{27} \sqrt{e^2}$$

$$a = \sqrt{3 \cdot 9} e$$

$$a = \sqrt{3} \sqrt{9} e$$

$$\underline{\underline{a = 3e\sqrt{3}}}$$



**Lösung 1977 6d:**

**3. Berechnung von e :**

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

$$324 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} \quad V_{\text{Pyr}} = 324 \text{ cm}^3$$

$$324 = \frac{1}{6} \cdot a^3 \sqrt{3} \quad \text{Seiten tauschen}$$

$$\frac{1}{6} \cdot a^3 \sqrt{3} = 324 \quad | \cdot 6$$

$$a^3 \sqrt{3} = 1944 \quad | : \sqrt{3}$$

$$a^3 = 1122,37 \quad a = 3e\sqrt{3}$$

$$(3e\sqrt{3})^3 = 1122,37 \quad \sqrt[3]{\phantom{x}}$$

$$3e\sqrt{3} = 10,3923 \quad | : 3$$

$$e\sqrt{3} = 3,464 \quad | : \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{e = 2 \text{ cm}}}$$