

Aufgabe 1976 8c:

3 P

Einem quadratischen Pyramidenstumpf mit den Maßen $a_1 = 6,3\text{ cm}$, $a_2 = 4,2\text{ cm}$ und $s = 5,5\text{ cm}$ wird eine Kugel umbeschrieben.

Wie groß sind der Radius und das Volumen dieser Umkugel?

Strategie 1976 8c:

Gegeben:

Quadratischer Pyramidenstumpf

$$a_1 = 6,3\text{ cm}$$

$$a_2 = 4,2\text{ cm}$$

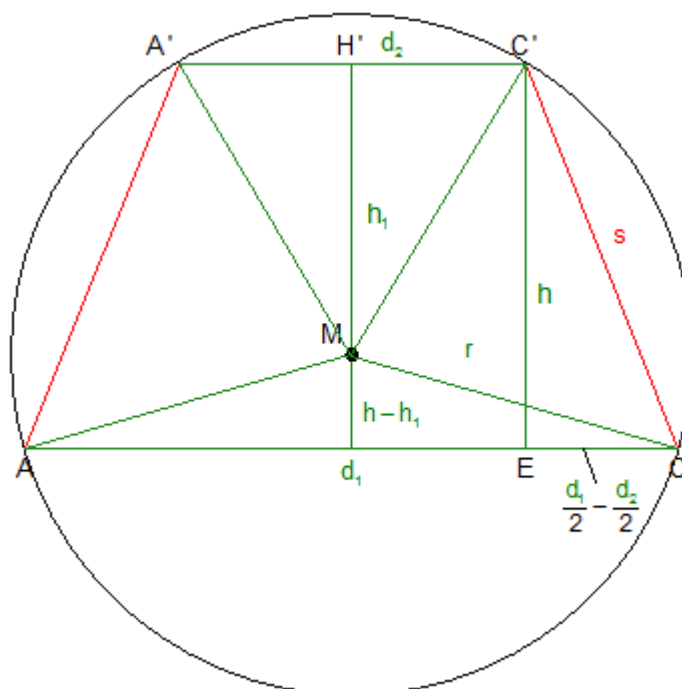
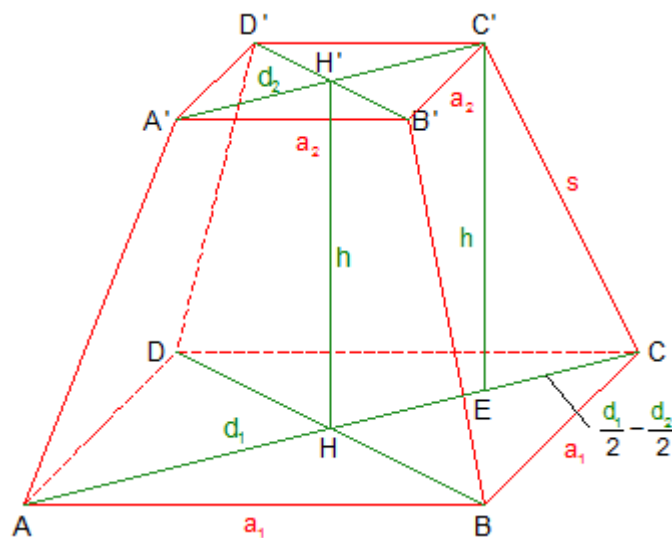
$$s = 5,5\text{ cm}$$

Gesucht:

$$r_K$$

$$V_K$$

Skizze:



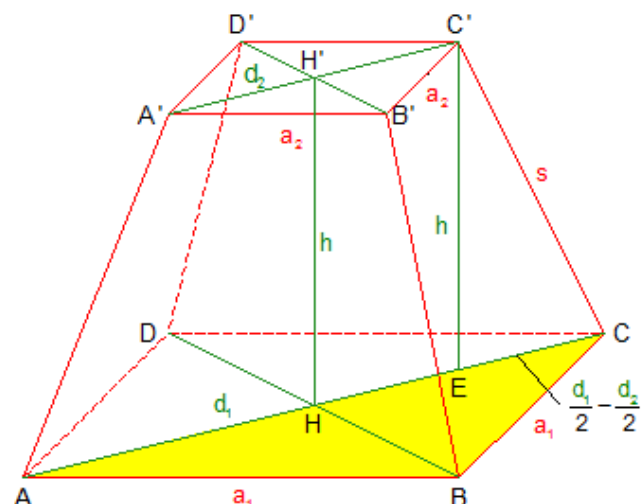
Lösung 1976 8c:

1. Berechnung der Grundflächendiagonalen d_1 :

$$d_1 = a_1 \cdot \sqrt{2}$$

$$d_1 = 6,3 \cdot \sqrt{2}$$

$$\underline{d_1 = 8,91 \text{ cm}}$$

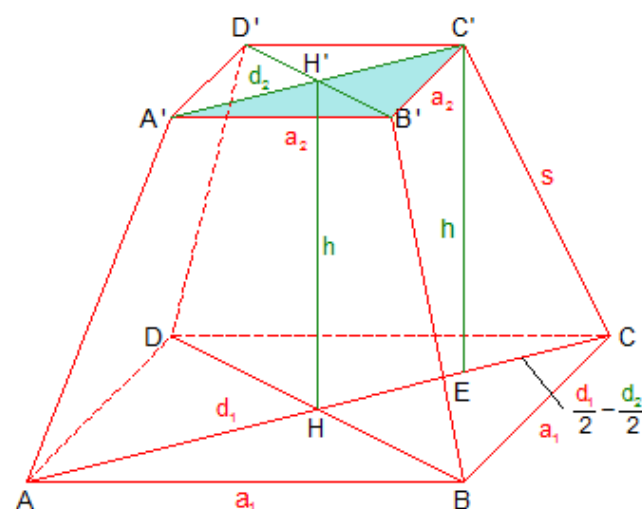


2. Berechnung der Deckflächendiagonalen d_2 :

$$d_2 = a_2 \cdot \sqrt{2}$$

$$d_2 = 4,2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\underline{d_2 = 5,94 \text{ cm}}$$



3. Berechnung der Pyramidenstumpfhöhe h :

$$h^2 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2} \right)^2 = s^2$$

Pythagoras im
rechtwinkligen
grünen
Teildreieck

$$h^2 + \left(\frac{8,91 - 5,94}{2} \right)^2 = 5,5^2$$

$$h^2 + \left(\frac{2,97}{2} \right)^2 = 5,5^2$$

$$h^2 + 1,485^2 = 5,5^2$$

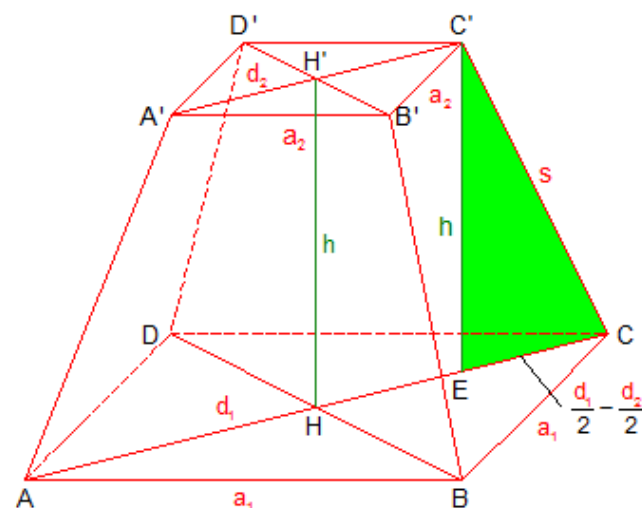
$$h^2 + 2,205 = 30,25$$

$$| - 2,205$$

$$h^2 = 28,045$$

$$| \sqrt{}$$

$$\underline{h = 5,30 \text{ cm}}$$



Lösung 1976 8c:

4. Berechnung der Teilhöhe h_1 :

$$\begin{aligned} \text{I: } h_1^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 &= r^2 \\ \text{II: } (h - h_1)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Pythagoras im
jeweiligen
rechtwinkligen
hellgrauen
Teildreieck

$$\text{I} = \text{II: } h_1^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = (h - h_1)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2$$

$$h_1^2 + \left(\frac{5,94}{2}\right)^2 = (5,3 - h_1)^2 + \left(\frac{8,91}{2}\right)^2$$

$$h_1^2 + 2,97^2 = (5,3 - h_1)^2 + 4,455^2$$

$$h_1^2 + 8,8209 = (5,3^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot h_1 + h_1^2) + 19,847$$

$$h_1^2 + 8,8209 = 28,09 - 10,6 \cdot h_1 + h_1^2 + 19,847 \quad \text{Zusammenfassen}$$

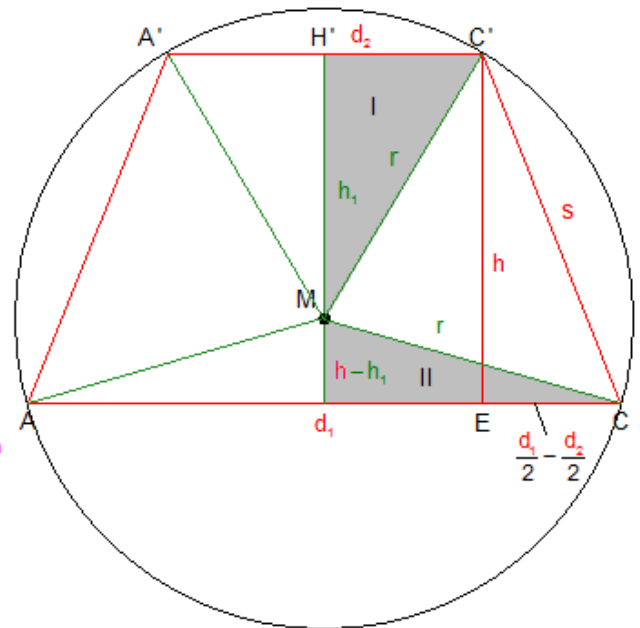
$$h_1^2 + 8,8209 = 47,937 - 10,6 \cdot h_1 + h_1^2 \quad | - h_1^2$$

$$8,8209 = 47,937 - 10,6 \cdot h_1 \quad | + 10,6 \cdot h_1$$

$$10,6 \cdot h_1 + 8,8209 = 47,937 \quad | - 8,8209$$

$$10,6 \cdot h_1 = 39,1161 \quad | : 10,6$$

$$h_1 = 3,69 \text{ cm}$$



5. Berechnung des Kugelradius r :

$$\text{I: } r^2 = h_1^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

Pythagoras im
rechtwinkligen
hellgrauen
Teildreieck

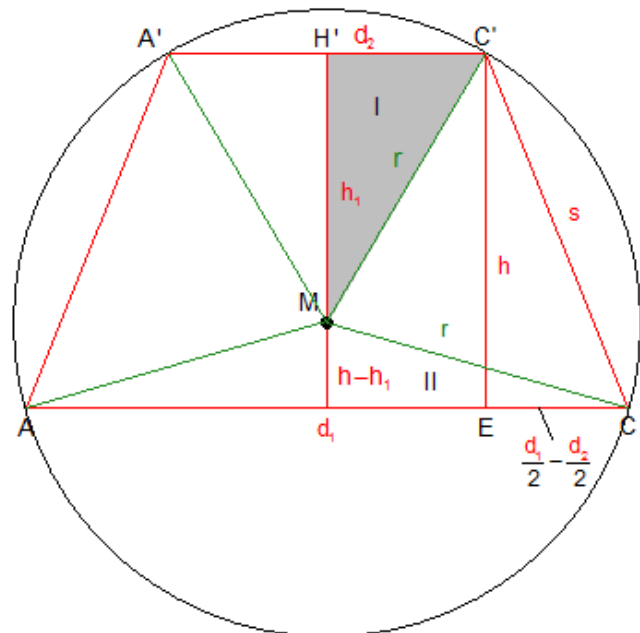
$$r^2 = 3,69^2 + \left(\frac{5,94}{2}\right)^2$$

$$r^2 = 3,69^2 + 2,97^2$$

$$r^2 = 13,6161 + 8,8209$$

$$r^2 = 22,437 \quad | \sqrt{}$$

$$r_K = 4,74 \text{ cm}$$



6. Berechnung des Kugelvolumens V_K :

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_K^3$$

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 4,74^3$$

$$V_K = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 106,496$$

$$V_K = 446,1 \text{ cm}^3$$

