Aufgabe 1976 7c: **3 P**

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sind die Winkel $CAB = \alpha$ und $ABC = \beta$, sowie die Höhe h_c gegeben. Wie groß ist das Volumen V_5 des Rotationskörpers, das bei Drehung um $\overline{AB} = c$ entsteht?

Strategie 1976 7c:

Gegeben:

Spitzwinkliges Dreieck

$\measuredangle CAB = \alpha$

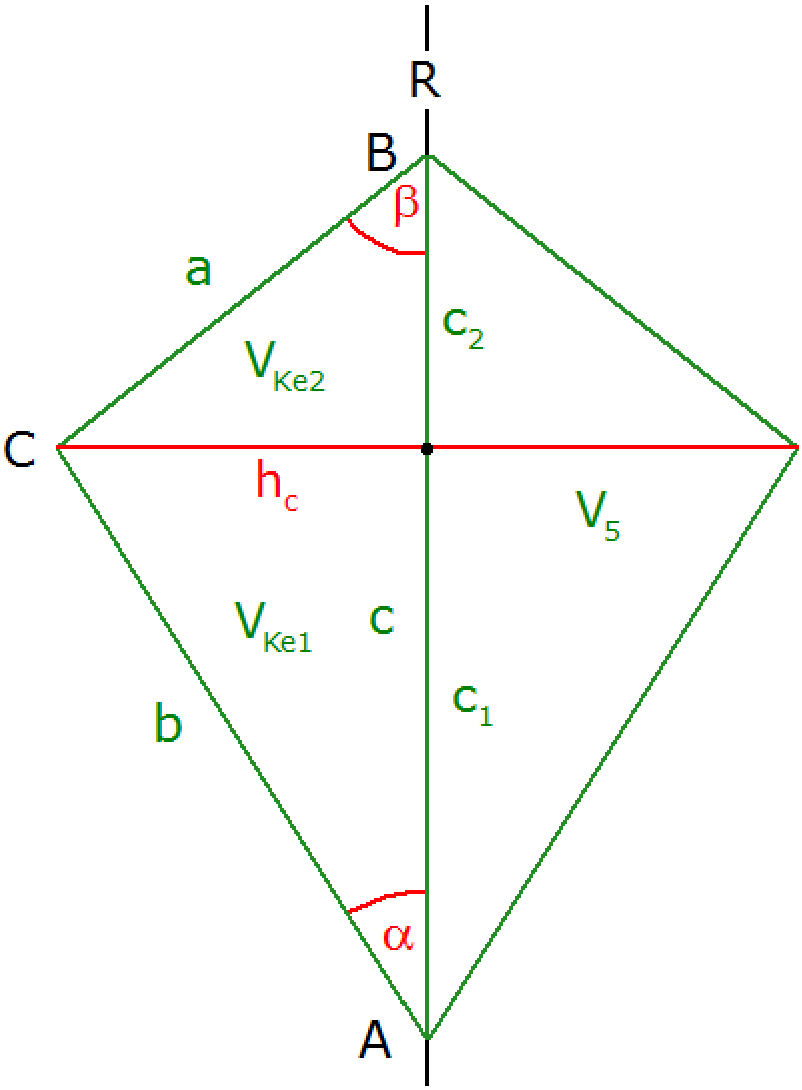
$\measuredangle ABC = \beta$

h_c

Gesucht:

V_5

Skizze:



Lösung 1976 7c:

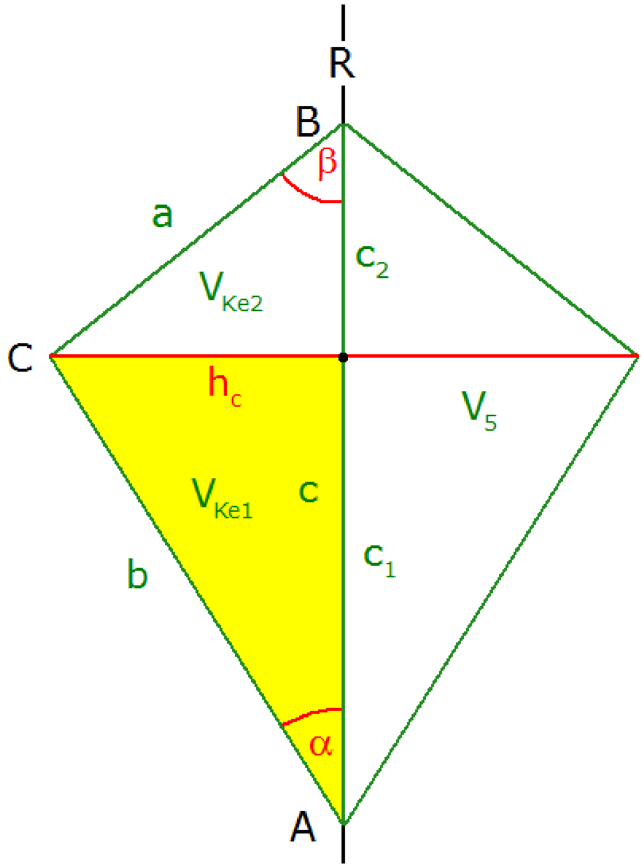
1. Berechnung der Strecke c_1:

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h_c}{c_1}$$ Tangensfunktion im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$\tan\alpha = \frac{h_c}{c_1} \qquad |\cdot c_1$$

$$c_1 \cdot \tan\alpha = h_c \qquad |:\tan\alpha$$

$$\underline{c_1 = \frac{h_c}{\tan\alpha}}$$



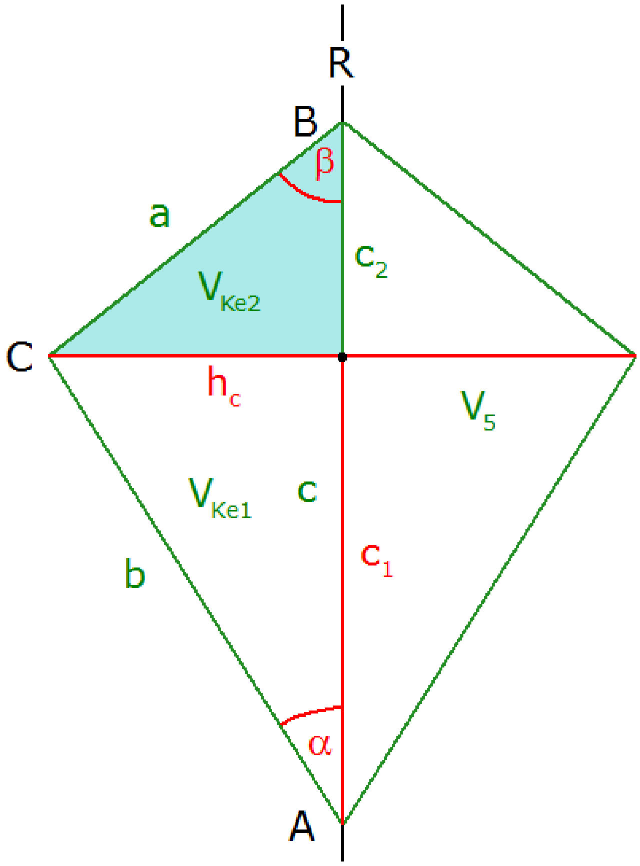
2. Berechnung der Strecke c_2:

$$\tan\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h_c}{c_2}$$ Tangensfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

$$\tan\beta = \frac{h_c}{c_2} \qquad |\cdot c_2$$

$$c_2 \cdot \tan\beta = h_c \qquad |:\tan\beta$$

$$\underline{c_2 = \frac{h_c}{\tan\beta}}$$

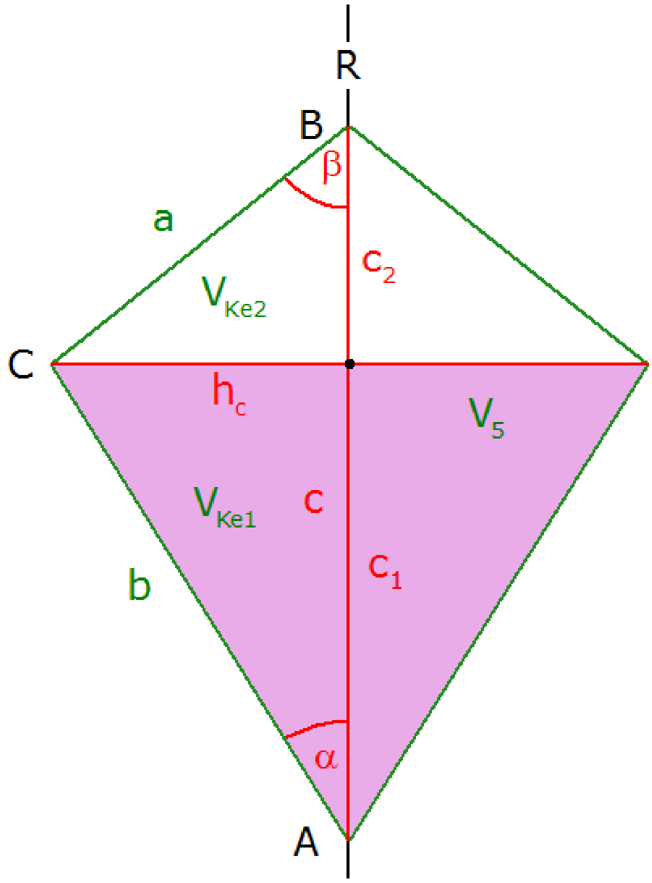


Lösung 1976 7c:

<u>3. Berechnung des Kegelvolumens</u> V_{Ke1}:

$$V_{Ke1} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

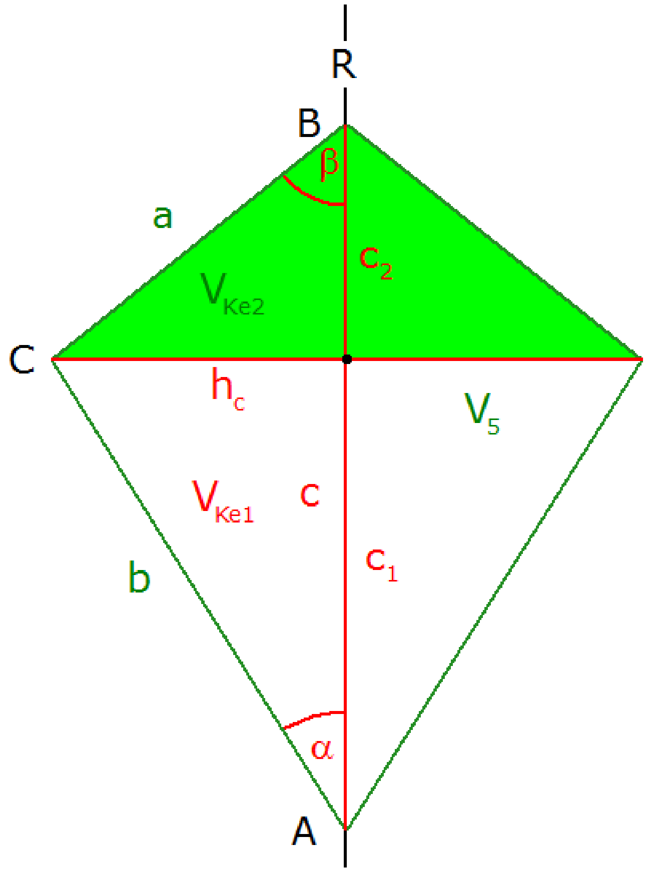
$$V_{Ke1} = \frac{\pi}{3} \cdot h_c^2 \cdot c_1$$



<u>4. Berechnung des Kegelvolumens</u> V_{Ke2}:

$$V_{Ke2} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{Ke2} = \frac{\pi}{3} \cdot h_c^2 \cdot c_2$$



Lösung 1976 7c:

5. Berechnung des Rotationskörpervolumens V_5:

$V_5 = V_{Ke1} + V_{Ke2}$

$$V_5 = \frac{\pi}{3} \cdot h_c^2 \cdot c_1 + \frac{\pi}{3} \cdot h_c^2 \cdot c_2$$ Gemeinsame Faktoren ausklammern

$$V_5 = \frac{\pi}{3} \cdot h_c^2 (c_1 + c_2)$$

$$V_5 = \frac{\pi}{3} \cdot h_c^2 \left(\frac{h_c}{\tan\alpha} + \frac{h_c}{\tan\beta} \right)$$ Gemeinsame Faktoren ausklammern

$$V_5 = \frac{\pi}{3} \cdot h_c^2 \cdot h_c \left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} \right)$$ Zusammenfassen

$$\underline{\underline{V_5 = \frac{\pi}{3} \cdot h_c^3 \cdot \left(\frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta} \right)}}$$