Aufgabe 1975 5c: **3 P**

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind vier Geraden durch die Gleichungen $(1)\ y = 0;\ \ (2)\ y = -x + 8;\ (3)\ x = 2;\ (4)\ y = a$ gegeben.

Durch die Gerade $y = a$ entsteht zusammen mit den anderen Geraden ein veränderliches Trapez ABC'D'.

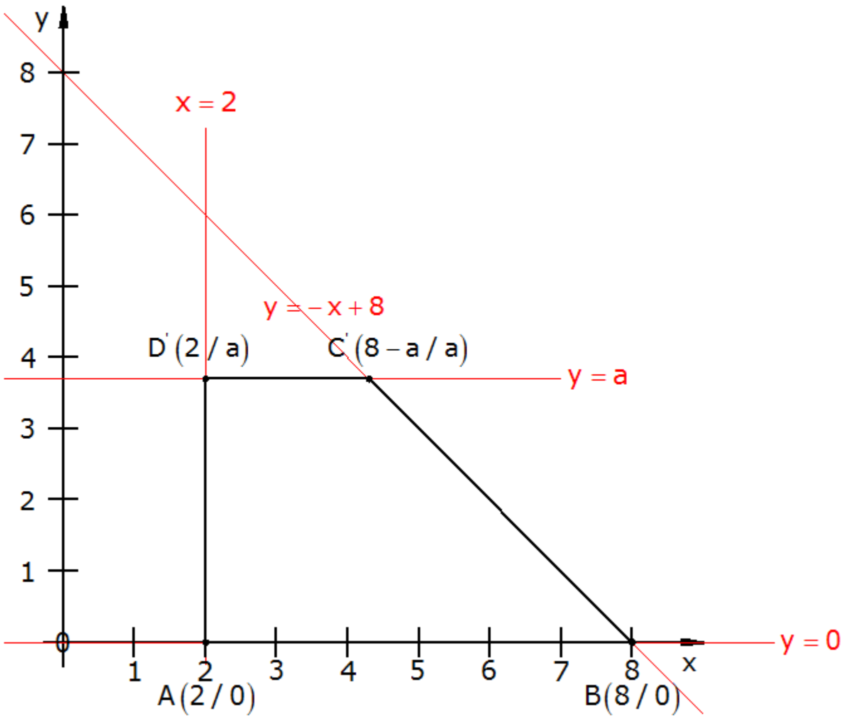
Innerhalb welcher Grenzen kann sich a bewegen?

Welche Koordinaten haben die Punkte C' und D' in Abhängigkeit von a?

Welches Volumen hat der durch Drehung des Trapezes um die x-Achse entstehende Drehkörper in Abhängigkeit von a?

Lösung 1975 5c:

1. Grenzen von a:



$\underline{\underline{0 < a < 6}}$

2. Berechnung der Punktkoordinaten von C' und D':

Schnittpunkt C': x = 8 - a ; y = a $\Rightarrow \underline{\underline{C'(8 - a / a)}}$

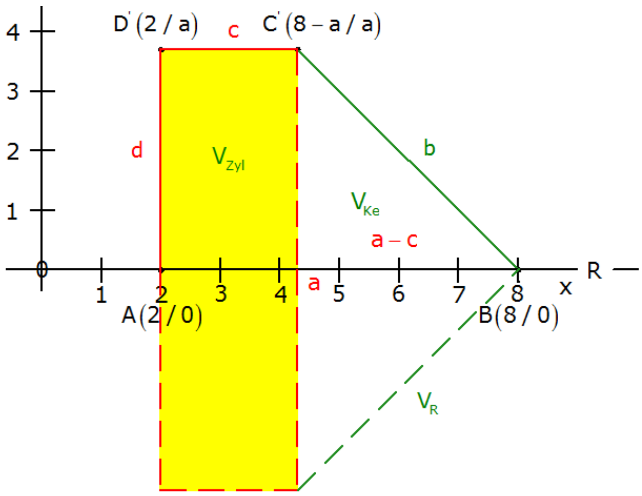
Schnittpunkt D': x = 2 ; y = a $\Rightarrow \underline{\underline{D'(2 / a)}}$

3. Berechnung des Zylindervolumens V_{Zyl}:

$V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

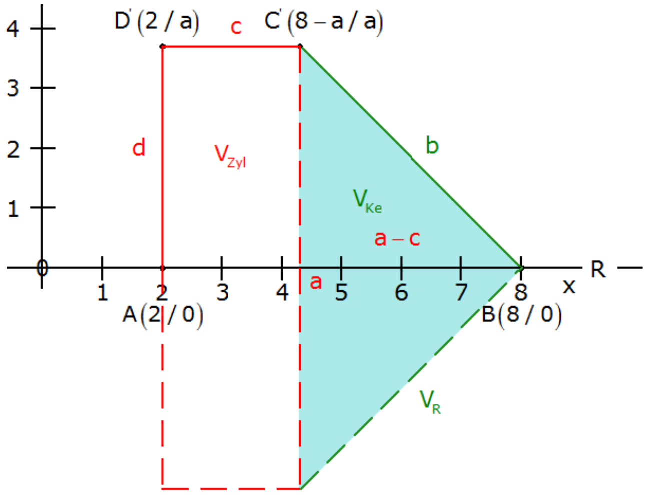
$V_{Zyl} = \pi \cdot a^2 \cdot (6 - a)$

$\underline{V_{Zyl} = 6\pi \cdot a^2 - \pi \cdot a^3}$



Lösung 1975 5c:

4. Berechnung des Kegelvolumens V_{Ke}:



$$V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot a$$

$$\underline{V_{Ke} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^3}$$

5. Berechnung des Rotationskörpervolumens V_R:

$$V_R = V_{Zyl} + V_{Ke}$$

$$V_R = 6\pi \cdot a^2 - \pi \cdot a^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^3$$

$$V_R = 6\pi \cdot a^2 - \frac{3}{3} \cdot \pi \cdot a^3 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot a^3$$

$$V_R = 6\pi \cdot a^2 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^3$$

$$V_R = \frac{18}{3} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^3$$

$$V_R = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^3$$

$$V_R = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot a$$

$$V_R = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2 - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot a$$

$$V_R = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (9 - a)$$

$$\underline{\underline{V_R = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (9 - a)}}$$