

Aufgabe 1972 3a:

4 P

Eine arithmetische und eine geometrische Zahlenfolge haben dasselbe Anfangsglied 8 und stimmen auch im zweiten Glied überein. Das dritte Glied der arithmetischen Zahlenfolge verhält sich zum dritten Glied der geometrischen Zahlenfolge wie 3 : 4. Wie heißen beide Zahlenfolgen bis zum 5. Glied?

Lösung 1972 3a:

1. Gegeben:

$$a_1 = 8$$

$$g_1 = 8$$

$$a_2 = g_2$$

$$g_3 : a_3 = 4 : 3$$

$$\frac{g_3}{a_3} = \frac{4}{3} \quad | \cdot a_3$$

$$g_3 = \frac{4}{3} a_3 \quad a_3 = a_1 + 2d = 8 + 2d$$

$$g_3 = \frac{4}{3}(8 + 2d)$$

$$g_3 = \frac{32}{3} + \frac{8d}{3}$$

$$g_3 = \frac{32 + 8d}{3}$$

arithmetische Folge: $\{ 8; 8 + d; 8 + 2d \}$

geometrische Folge: $\left\{ 8; 8 + d; \frac{32 + 8d}{3} \right\}$

2. Berechnung von d:

$$(1) : q = \frac{8+d}{8}$$

$$(2) : q = \frac{\frac{32+8d}{3}}{8+d}$$

$$8 \cdot q = 8 + d$$
$$\wedge (8+d) \cdot q = \frac{32+8d}{3}$$

$$(1) = (2) : \frac{8+d}{8} = \frac{\frac{32+8d}{3}}{8+d}$$

Gleichsetzverfahren

$$\frac{8+d}{8} = \frac{32+8d}{3} \cdot \frac{1}{8+d}$$

$$\frac{8+d}{8} = \frac{32+8d}{3(8+d)}$$

$$\frac{8+d}{8} = \frac{32+8d}{24+3d} \quad | \cdot 8$$

$$8+d = \frac{32+8d}{24+3d} \cdot 8 \quad | \cdot (24+3d)$$

$$(8+d)(24+3d) = (32+8d) \cdot 8$$

$$192 + 24d + 24d + 3d^2 = 256 + 64d$$

$$3d^2 + 48d + 192 = 256 + 64d \quad | - 64d$$

$$3d^2 - 16d + 192 = 256 \quad | - 256$$

$$3d^2 - 16d - 64 = 0 \quad | : 3$$

Lösung 1972 3a:

$$d^2 - \frac{16}{3}d - \frac{64}{3} = 0$$

Normalform einer quadratischen Gleichung

$$d^2 - \frac{16}{3}d - \frac{64}{3} = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$p = -\frac{16}{3}$$

$$q = -\frac{64}{3}$$

p und q bestimmen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{-16}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(-\frac{16}{3}\right)^2}{4} - \left(-\frac{64}{3}\right)}$$

$$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{256}{9} + \frac{64}{3}}$$

$$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{64}{3}}$$

$$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{192}{9}}$$

$$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \sqrt{\frac{256}{9}}$$

$$x_{1,2} = \frac{8}{3} \pm \frac{16}{3}$$

$$x_1 = \frac{8}{3} + \frac{16}{3}$$

$$x_1 = \frac{24}{3}$$

$$\underline{x_1 = 8}$$

$$x_2 = \frac{8}{3} - \frac{16}{3}$$

$$x_2 = -\frac{8}{3}$$

$$\underline{\underline{d_1 = 8}}$$

$$\underline{\underline{d_2 = -\frac{8}{3}}}$$

3. Berechnung von q:

$$q = \frac{8+d}{8}$$

$$q_1 = \frac{8+8}{8}$$

$$q_1 = \frac{16}{8}$$

$$\underline{q_1 = 2}$$

$$q_2 = \frac{8 - \frac{8}{3}}{8}$$

$$q_2 = \frac{\frac{24}{3} - \frac{8}{3}}{8}$$

Lösung 1972 3a:

$$q_2 = \frac{16}{3}$$

$$q_2 = \frac{16}{24}$$

$$q_2 = \frac{2}{3}$$

4. Berechnung der Zahlenfolgen:

1. arithmetische Zahlenfolge: $\{ 8; 16; 24; 32; 40 \}$

1. geometrische Zahlenfolge: $\{ 8; 16; 32; 64; 128 \}$

2. arithmetische Zahlenfolge: $\left\{ 8; \frac{16}{3}; \frac{8}{3}; 0; -\frac{8}{3} \right\}$

2. geometrische Zahlenfolge: $\left\{ 8; \frac{16}{3}; \frac{32}{9}; \frac{64}{27}; \frac{128}{81} \right\}$