

Aufgabe 1972 2c:

3 P

Eine Spirale entsteht, indem man Halbkreise gleichsinnig drehend so aneinander setzt, daß der Endpunkt eines Halbkreises zugleich der Anfangspunkt des nächsten ist und alle Kreismittelpunkte auf einer Geraden liegen. Jeder Radius des nachfolgenden Halbkreises ist um $\frac{1}{9}$ kleiner als der Radius des vorhergehenden Halbkreises.

Wie lang wäre die Spirale, die aus unendlich vielen Halbkreisen bestehen würde?

Lösung 1972 2c:

Berechnung der Spirallänge mit unendlich vielen Halbkreisen:

$$u_1 = r_1 \cdot \pi$$

$$u_2 = r_2 \cdot \pi$$

⋮

$$u_n = r_n \cdot \pi$$

$$g_1 = u_1$$

$$q = \frac{8}{9}$$

$$n \rightarrow \infty$$

Geometrische Zahlenfolge

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{g_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$s_n = \frac{g_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{g_1(1 - 0)}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{g_1 \cdot 1}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{u_1}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{8,1 \cdot \pi}{1 - \frac{8}{9}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{25,4469}{\frac{1}{9}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 229,0 \text{ cm}$$

Antwort: Die Spirale wäre 229,0 cm lang.