

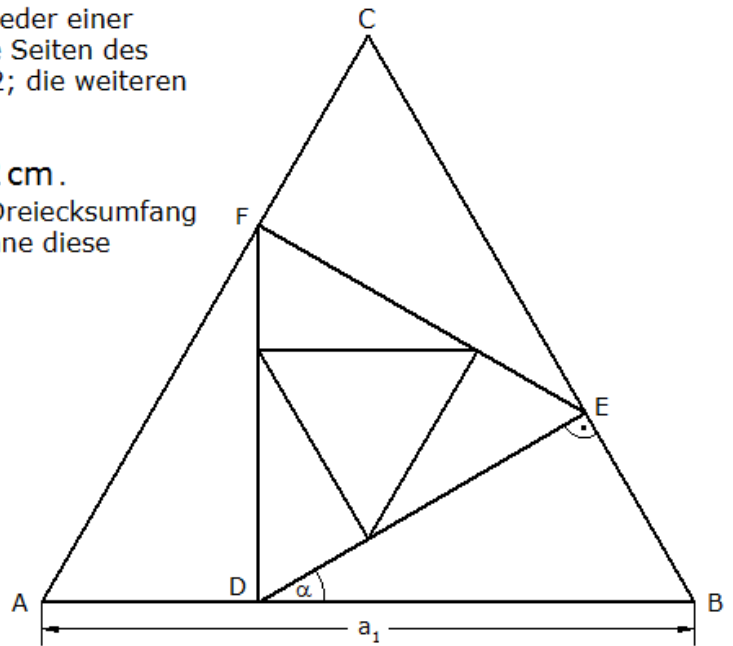
Aufgabe 1971 2d:

4 P

Nebenstehende Skizze zeigt die ersten drei Glieder einer Dreiecksfolge. Die Punkte D, E und F teilen die Seiten des gleichseitigen Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2; die weiteren Dreiecke werden fortlaufend in gleicher Weise eingeschrieben.

Das erste Dreieck hat die Seitenlänge $a_1 = 12 \text{ cm}$.

Stelle die allgemeinen Formeln für den n-ten Dreiecksumfang und für die n-te Dreiecksfläche auf und berechne diese Größen für $n = 4$!



Lösung 1971 2d:

1. Erstellung der Formel für u_n :

$$u_1 = 3 \cdot a_1$$

$$u_1 = 3 \cdot 12$$

$$u_1 = 36 \text{ cm}$$

$$u_n = u_1 \cdot q_a^{n-1}$$

$$u_n = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^{n-1}$$

2. Berechnung des Dreiecksumfangs u_4 :

$$u_4 = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^{4-1}$$

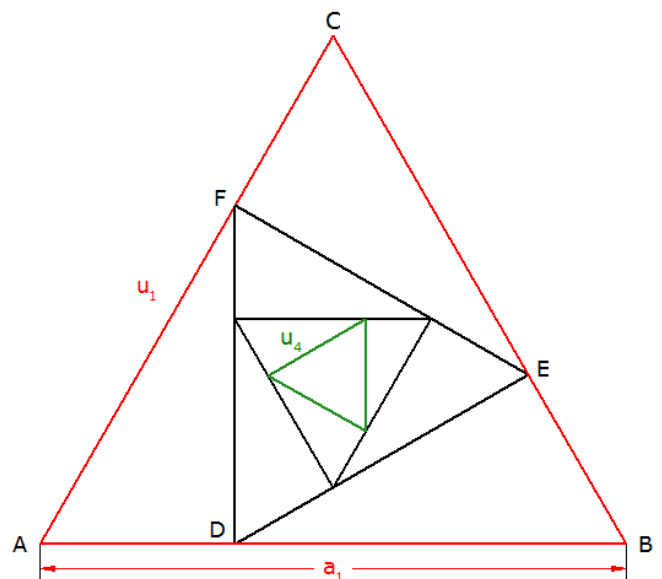
$$u_4 = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)^3$$

$$u_4 = 36 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 (\sqrt{3})^3$$

$$u_4 = 36 \cdot \frac{1}{27} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$u_4 = 4 \cdot \sqrt{3}$$

$$u_4 = 6,928 \text{ cm}$$



Lösung 1971 2d:

3. Erstellung der Formel für A_n :

$$A_1 = \frac{a_1^2}{4} \sqrt{3}$$

Flächenformel
gleichseitiges
Dreieck

$$A_1 = \frac{12^2}{4} \sqrt{3}$$

$$A_1 = \frac{144}{4} \sqrt{3}$$

$$A_1 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_2 = \frac{a_2^2}{4} \sqrt{3}$$

$$A_2 = \frac{(4\sqrt{3})^2}{4} \sqrt{3}$$

Flächenformel
gleichseitiges
Dreieck

$$A_2 = \frac{48}{4} \sqrt{3}$$

$$A_2 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_1 \cdot q_A = A_2 \quad | : A_1$$

$$q_A = \frac{A_2}{A_1}$$

$$q_A = \frac{12\sqrt{3}}{36\sqrt{3}}$$

$$q_A = \frac{1}{3}$$

$$A_n = A_1 \cdot q_A^{n-1}$$

$$A_n = 36\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

Lösung 1971 2d:

4. Berechnung der Dreiecksfläche A_4 :

$$A_4 = 36\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1}$$

$$A_4 = 36\sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$A_4 = 36\sqrt{3} \cdot \frac{1}{27}$$

$$A_4 = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{A_4 = 2,309 \text{ cm}^2}}$$

