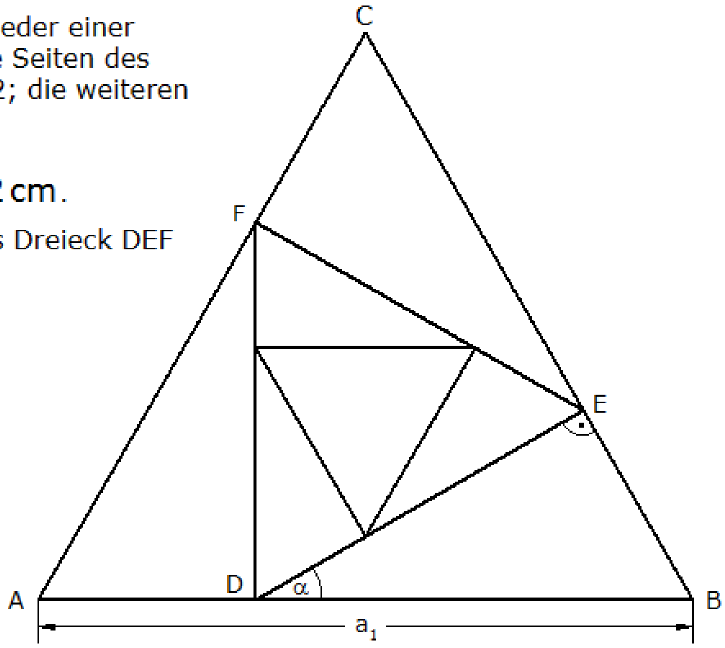
Aufgabe 1971 2b: 4 P

Nebenstehende Skizze zeigt die ersten drei Glieder einer Dreiecksfolge. Die Punkte D, E und F teilen die Seiten des gleichseitigen Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2; die weiteren Dreiecke werden fortlaufend in gleicher Weise einbeschrieben.

Das erste Dreieck hat die Seitenlänge $a_1 = 12\,\text{cm}$.

Bestimme den Winkel α und beweise, daß das Dreieck DEF gleichseitig ist!



Lösung 1971 2b:

1. Berechnung der Strecke $\overline{DE} = a_2$:

$a_2^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BE}^2 - 2 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BE} \cdot \cos\beta$ Kosinussatz im allgemeinen gelben Teildreieck

$a_2^2 = \left(\frac{2}{3} a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} a_1\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} a_1 \cdot \frac{1}{3} a_1 \cdot \cos\beta$

$a_2^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot 12\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 12\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \cos 60^\circ$

$a_2^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 0,5$ $\cos 60^\circ = 0,5$

$a_2^2 = 64 + 16 - 32$

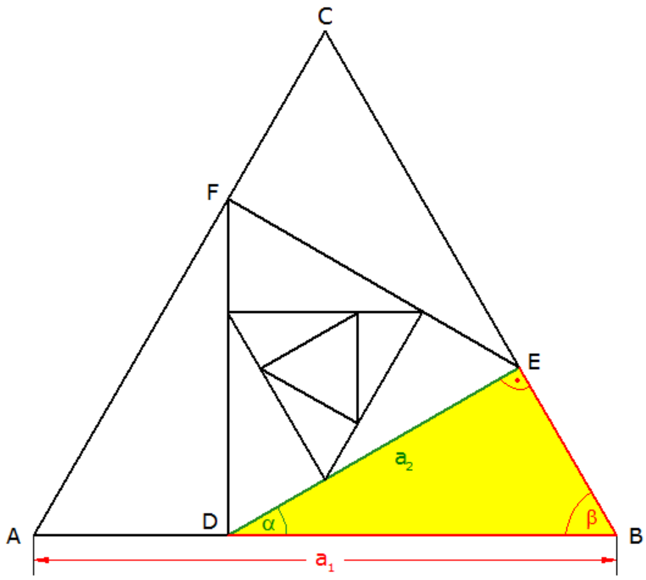
$a_2^2 = 48$

$a_2^2 = 16 \cdot 3$ $\quad | \sqrt{\ }$

$a_2 = \sqrt{16 \cdot 3}$

$a_2 = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3}$

$\underline{a_2 = 4\sqrt{3}\,\text{cm}}$



2. Berechnung des Winkels α:

$\frac{\sin\alpha}{\overline{BE}} = \frac{\sin\beta}{a_2}$ Sinussatz im allgemeinen gelben Teildreieck

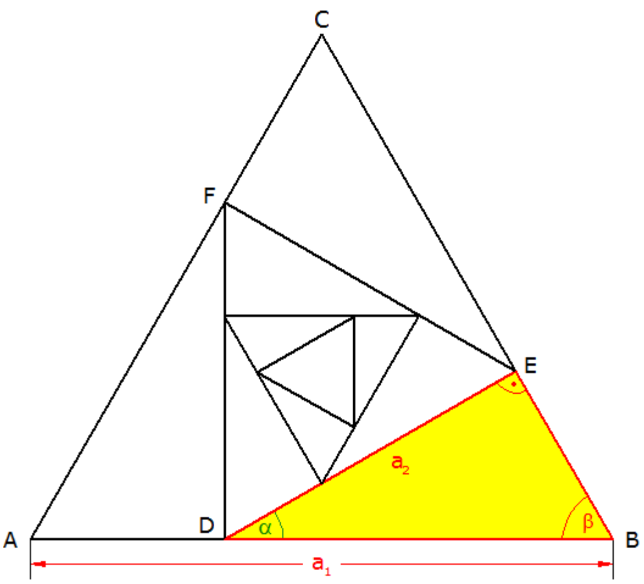
$\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{3} a_1} = \frac{\sin 60^\circ}{4\sqrt{3}}$ $\beta = 60^\circ$, da Dreieck ABC gleichseitig

$\frac{\sin\alpha}{\frac{1}{3} \cdot 12} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$ $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

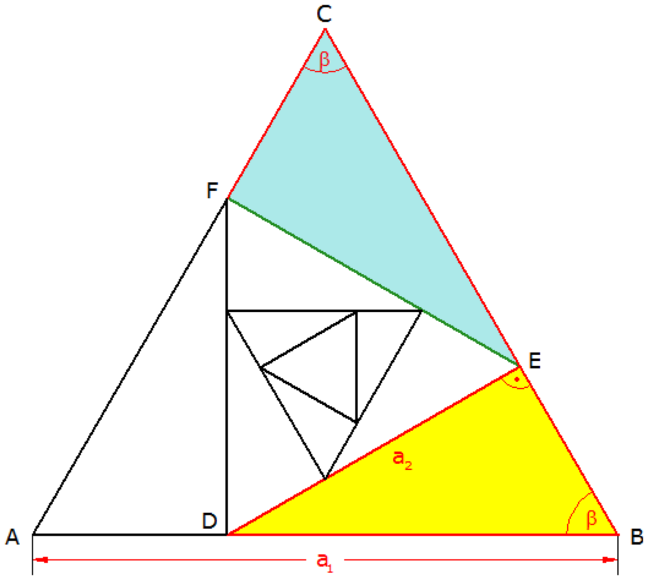
$\frac{\sin\alpha}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4}$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\underline{\underline{\alpha = 30^\circ}}$

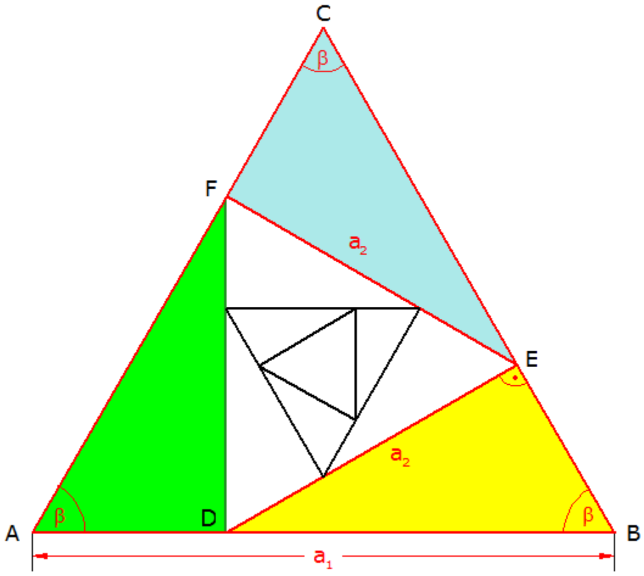


Lösung 1971 2b:



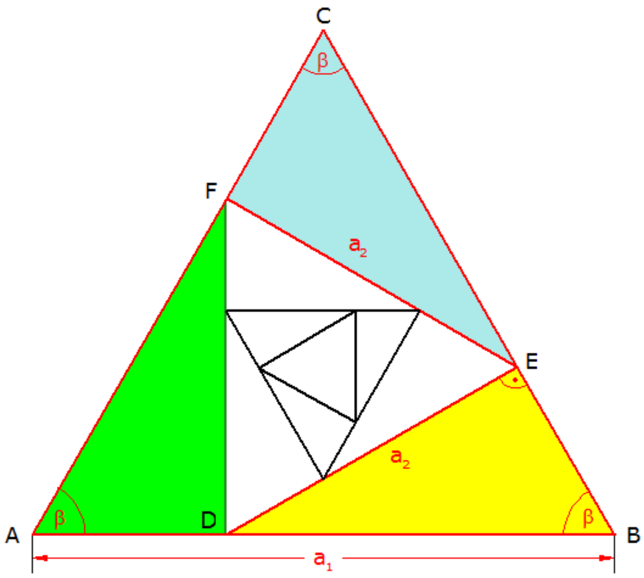
3. Berechnung der Strecke $\overline{EF}$:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle ECF = \beta \\ \overline{EC} = \overline{BD} = \frac{2}{3}a_1 \\ \overline{CF} = \overline{BE} = \frac{1}{3}a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overline{EF} = a_2}$$



4. Berechnung der Strecke $\overline{DF}$:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DAF = \beta \\ \overline{AF} = \overline{BD} = \frac{2}{3}a_1 \\ \overline{AD} = \overline{BE} = \frac{1}{3}a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overline{DF} = a_2}$$



5. Beweis, daß Dreieck DEF gleichseitig ist:

$$\underline{\underline{\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{DF} = a_2}}$$

Antwort: Da alle drei Seiten gleich lang sind, ist das Dreieck DEF gleichseitig.