

Aufgabe 1970 2b:

2 P

Einem Quadrat mit der Seite $a_1 = 8\text{ cm}$ ist ein Kreis, diesem Kreis wieder ein Quadrat usw. eingeschrieben. Auf diese Weise entsteht eine Folge einander eingeschriebener Kreise und Quadrate. Berechne die Differenz zwischen der Fläche des 7. Quadrates und der Fläche des 7. Kreises!

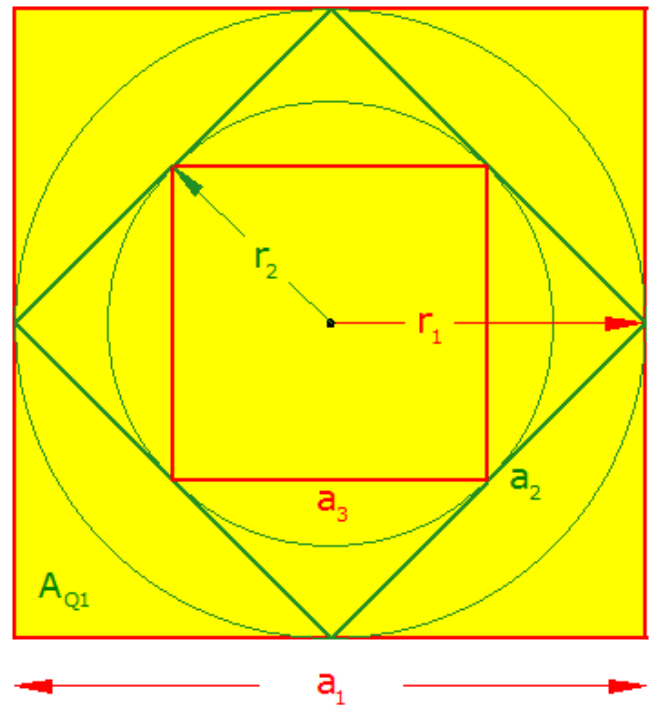
Lösung 1970 2b:

1. Berechnung der Quadratfläche A_{Q1} :

$$A_{Q1} = a_1^2$$

$$A_{Q1} = 8^2$$

$$\underline{A_{Q1} = 64\text{ cm}^2}$$



2. Berechnung der Quadratseite a_2 :

$$a_2^2 = \left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$$

Pythagoras im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

$$a_2^2 = \left(\frac{8}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$a_2^2 = 4^2 + 4^2$$

$$a_2^2 = 16 + 16$$

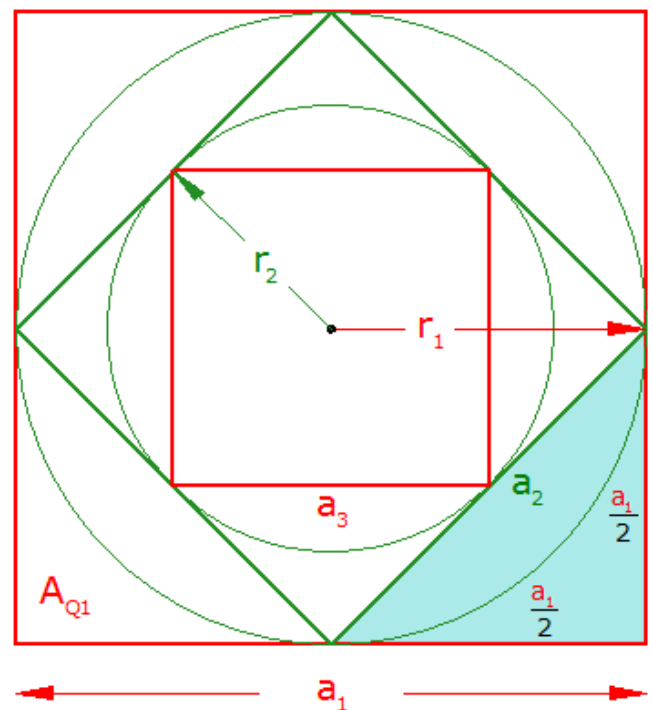
$$a_2^2 = 32 \quad \left| \sqrt{} \right.$$

$$a_2 = \sqrt{32}$$

$$a_2 = \sqrt{16 \cdot 2} \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$a_2 = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2}$$

$$\underline{a_2 = 4\sqrt{2}\text{ cm}}$$



Lösung 1970 2b:

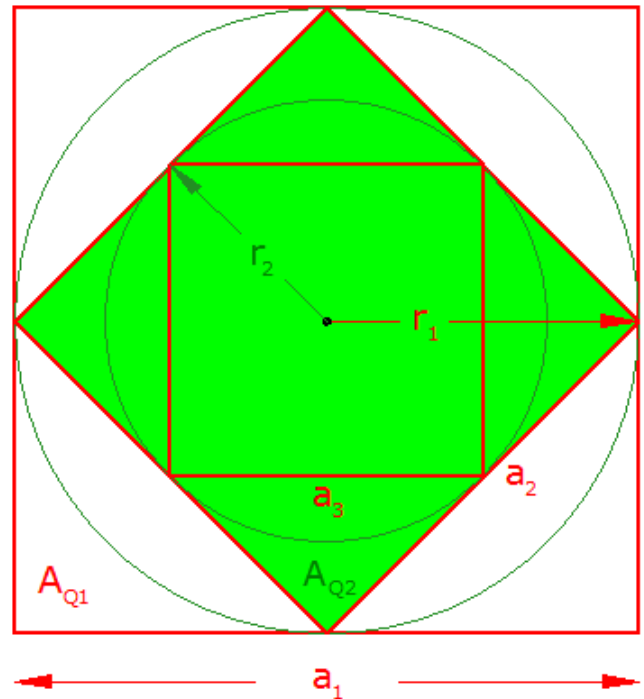
3. Berechnung der Quadratfläche A_{Q2} :

$$A_{Q2} = a_2^2$$

$$A_{Q2} = (4\sqrt{2})^2$$

$$A_{Q2} = 16 \cdot 2$$

$$\underline{A_{Q2} = 32 \text{ cm}^2}$$



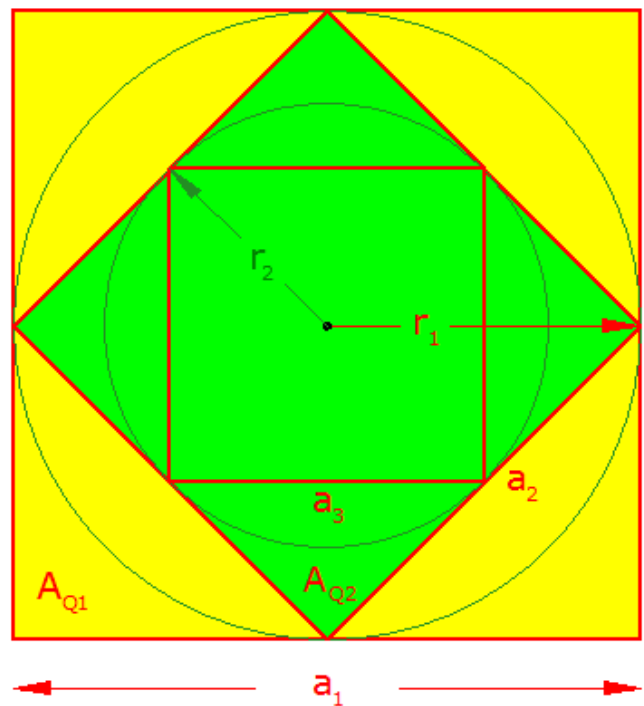
4. Berechnung des Quotienten q_Q der Quadratflächenfolge:

$$A_{Q1} \cdot q_Q = A_{Q2}$$

$$64 \cdot q_Q = 32 \quad | : 64$$

$$q_Q = \frac{32}{64}$$

$$\underline{q_Q = \frac{1}{2}}$$



Lösung 1970 2b:

5. Berechnung der Kreisfläche A_{K1} :

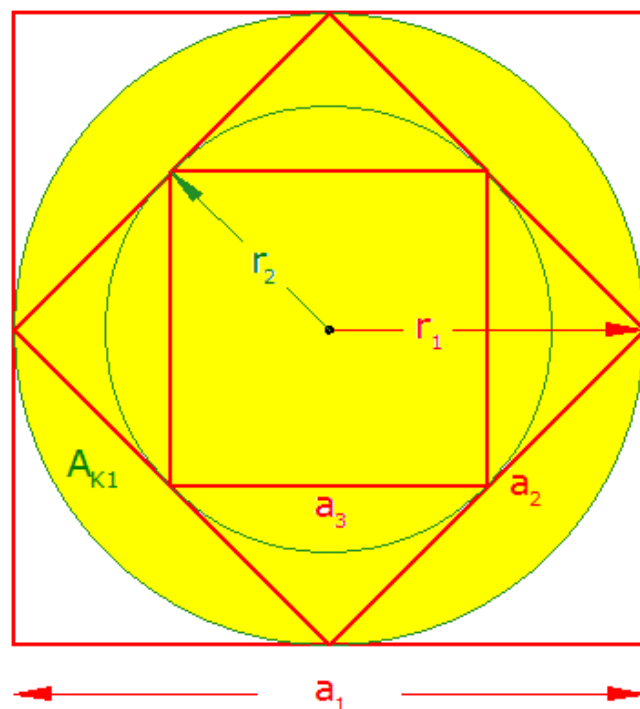
$$A_{K1} = \pi \cdot r_1^2$$

$$A_{K1} = \pi \cdot \left(\frac{a_1}{2}\right)^2$$

$$A_{K1} = \pi \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^2$$

$$A_{K1} = \pi \cdot 4^2$$

$$\underline{A_{K1} = 16\pi \text{ cm}^2}$$



6. Berechnung der Kreisfläche A_{K2} :

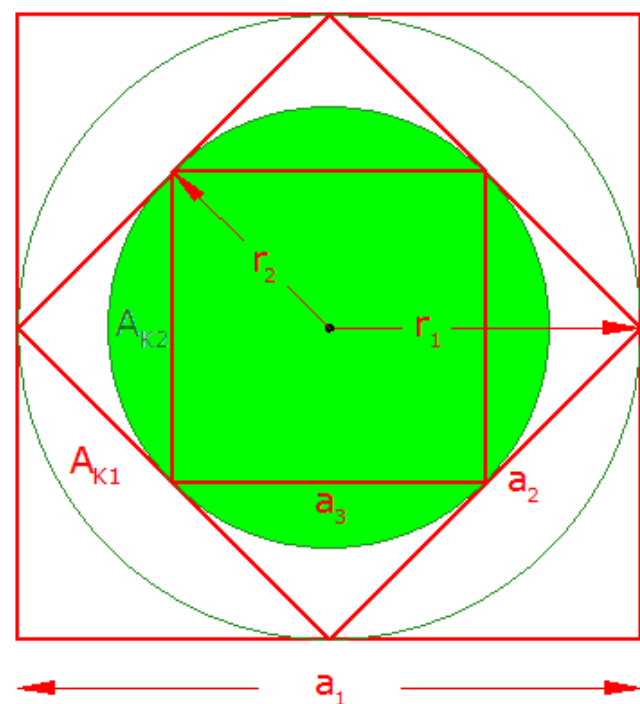
$$A_{K2} = \pi \cdot r_2^2$$

$$A_{K2} = \pi \cdot \left(\frac{a_2}{2}\right)^2$$

$$A_{K2} = \pi \cdot \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$A_{K2} = \pi \cdot (2\sqrt{2})^2$$

$$\underline{A_{K2} = 8\pi \text{ cm}^2}$$



Lösung 1970 2b:

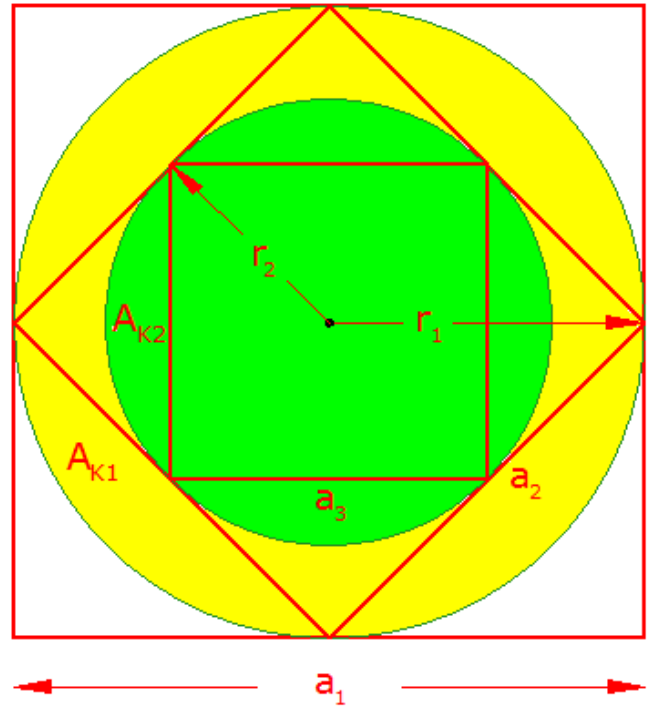
7. Berechnung des Quotienten q_K der Kreisflächenfolge:

$$A_{K1} \cdot q_K = A_{K2}$$

$$16\pi \cdot q_K = 8\pi \quad | : 16\pi$$

$$q_K = \frac{8\pi}{16\pi}$$

$$q_K = \frac{1}{2}$$



8. Berechnung der Quadratfläche A_{Q7} :

$$A_{Qn} = A_{Q1} \cdot q_Q^{n-1}$$

$$A_{Q7} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$

$$A_{Q7} = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$A_{Q7} = 64 \cdot \frac{1}{2^6}$$

$$A_{Q7} = 64 \cdot \frac{1}{64}$$

$$\underline{A_{Q7} = 1 \text{ cm}^2}$$

Lösung 1970 2b:

9. Berechnung der Kreisfläche A_{K7} :

$$A_{Kn} = A_{K1} \cdot q_K^{n-1}$$

$$A_{K7} = 16\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-1}$$

$$A_{K7} = 16\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$A_{K7} = 16\pi \cdot \frac{1}{2^6}$$

$$A_{K7} = 16\pi \cdot \frac{1}{64}$$

$$A_{K7} = \frac{1}{4}\pi$$

$$\underline{A_{K7} = 0,7854 \text{ cm}^2}$$

10. Berechnung der Flächendifferenz Diff:

$$\text{Diff} = A_{Q7} - A_{K7}$$

$$\text{Diff} = 1 - 0,7854$$

$$\underline{\underline{\text{Diff} = 0,216 \text{ cm}^2}}$$