

Aufgabe 1966/2 3a:

4 P

In ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 20 \text{ cm}$ wird ein zweites Quadrat eingezeichnet, indem man benachbarte Seitenmitten miteinander verbindet. Führt man in der gleichen Weise fort, so erhält man eine Folge von Quadraten. Wie groß ist der Umfang des 9. Quadrates dieser Folge?

Lösung 1966/2 3a:

1. Berechnung der Seite x:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \text{Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \quad \left| \sqrt{\quad} \right.$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} \quad \text{Wurzelgesetz } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

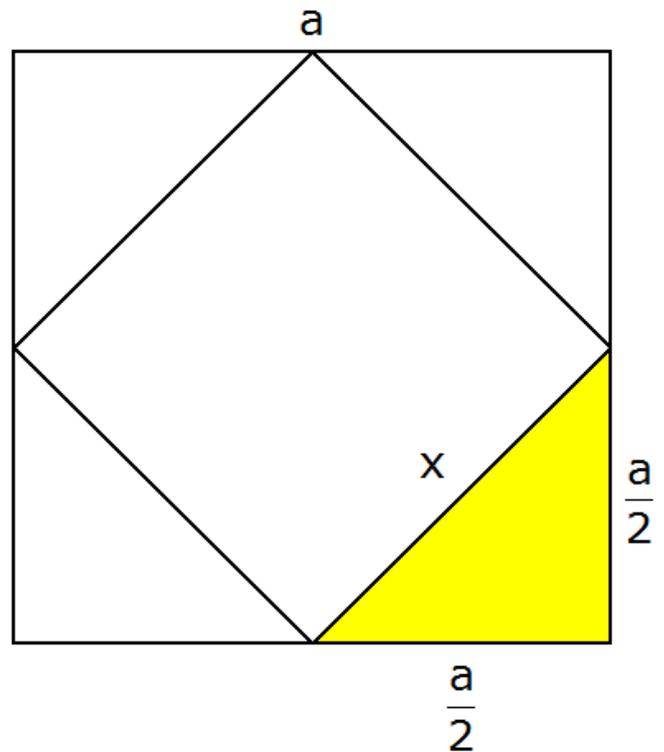
$$x = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \quad \text{Bruch erweitern}$$

$$x = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2} \text{ cm}$$



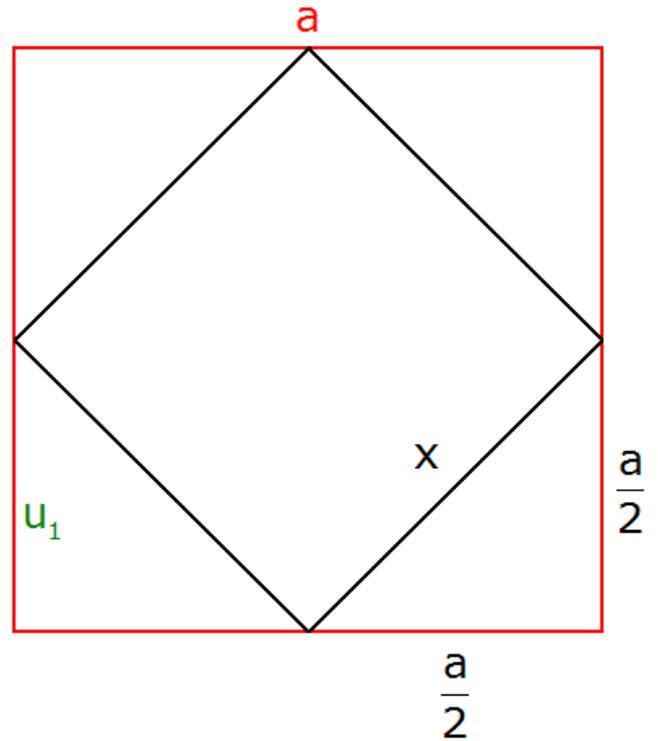
Lösung 1966/2 3a:

2. Berechnung des Umfangs u_1 :

$$u_1 = 4 \cdot a$$

$$u_1 = 4 \cdot 20$$

$$\underline{u_1 = 80 \text{ cm}}$$



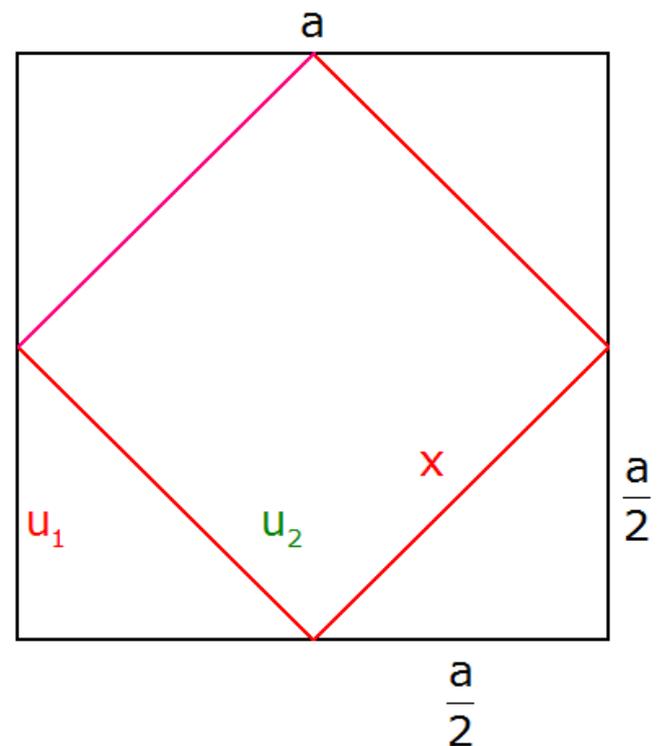
3. Berechnung des Umfangs u_2 :

$$u_2 = 4 \cdot x$$

$$u_2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{2}$$

$$u_2 = 2 \cdot 20 \cdot \sqrt{2}$$

$$\underline{u_2 = 40 \cdot \sqrt{2} \text{ cm}}$$



4. Berechnung von q :

$$q = \frac{u_2}{u_1}$$

$$q = \frac{40 \cdot \sqrt{2}}{80}$$

$$q = \frac{40}{80} \cdot \sqrt{2}$$

$$\underline{q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}}$$

Lösung 1966/2 3a:

5. Berechnung des Umfangs u_9 :

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$$u_9 = u_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^{9-1}$$

$$u_9 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^8$$

$$u_9 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \sqrt{2}^8$$

$$u_9 = 80 \cdot \frac{1}{256} \cdot 16$$

$$u_9 = \frac{1280}{256}$$

$$\underline{\underline{u_9 = 5 \text{ cm}}}$$

Antwort: Das 9. Quadrat hat einen Umfang von 5 cm.

