

Aufgabe 1966/1 5b:

4 P

Ein Brunnentrog aus Marmor ($\rho = 2,7 \text{ g / cm}^3$) mit einem halbkugelförmigen Becken ($r = 50 \text{ cm}$) hat die Form eines regelmäßigen sechskantigen Pyramidenstumpfes, dessen untere Grundkante $b = 60 \text{ cm}$, dessen obere Grundkante $a = 80 \text{ cm}$ und dessen Seitenkante $s = 70 \text{ cm}$ lang sind.

Welche Masse m hat der Trog?

Strategie 1966/1 5b:

Gegeben:

Sechseckiger
Pyramidenstumpf
+ Halbkugel

$$\rho = 2,7 \text{ g / cm}^3$$

$$r = 50 \text{ cm}$$

$$b = 60 \text{ cm}$$

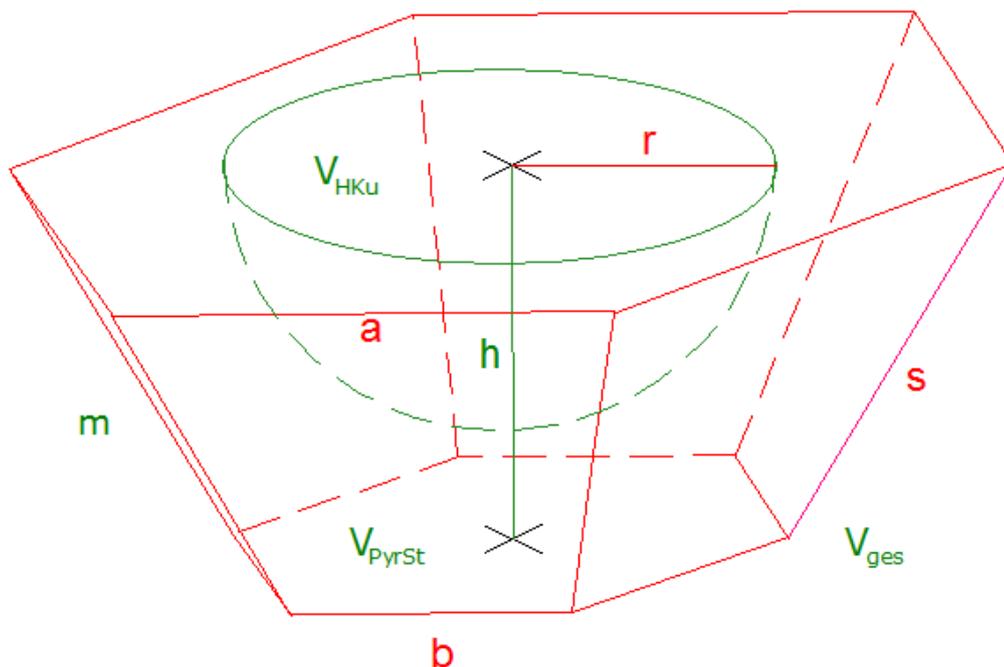
$$a = 80 \text{ cm}$$

$$s = 70 \text{ cm}$$

Gesucht:

m

Skizze:



Lösung 1966/1 5b:

1. Berechnung der Pyramidenstumpfhöhe h:

$$h^2 + \left(\frac{2a - 2b}{2}\right)^2 = s^2 \quad \text{Pythagoras im rechtwinkligen gelben Dreieck}$$

$$h^2 + \left(\frac{2 \cdot 80 - 2 \cdot 60}{2}\right)^2 = 70^2$$

$$h^2 + \left(\frac{160 - 120}{2}\right)^2 = 70^2$$

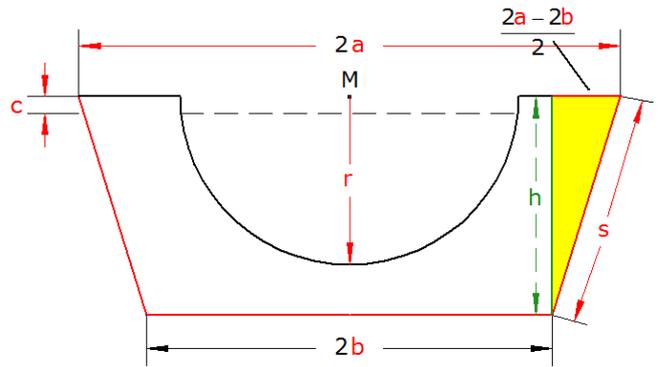
$$h^2 + \left(\frac{40}{2}\right)^2 = 70^2$$

$$h^2 + 20^2 = 70^2$$

$$h^2 + 400 = 4900 \quad | - 400$$

$$h^2 = 4500 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$h = 67,08 \text{ cm}$$



2. Berechnung des Pyramidenstumpfvolumens V_{PyrSt} :

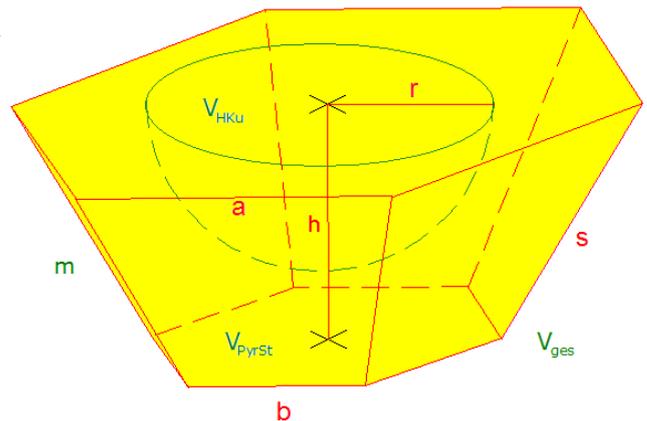
$$V_{\text{PyrSt}} = \frac{h}{2} \sqrt{3} (a^2 + a \cdot b + b^2)$$

$$V_{\text{PyrSt}} = \frac{67,08}{2} \sqrt{3} (80^2 + 80 \cdot 60 + 60^2)$$

$$V_{\text{PyrSt}} = 58,09 (6400 + 4800 + 3600)$$

$$V_{\text{PyrSt}} = 58,09 \cdot 14800$$

$$V_{\text{PyrSt}} = 859732 \text{ cm}^3$$



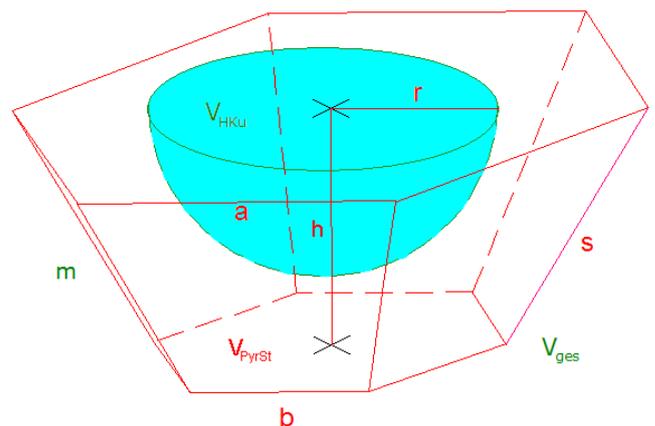
3. Berechnung des Halbkugelvolumens V_{HKu} :

$$V_{\text{HKu}} = \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$V_{\text{HKu}} = \frac{2}{3} \pi 50^3$$

$$V_{\text{HKu}} = \frac{2}{3} \pi \cdot 125000$$

$$V_{\text{HKu}} = 261799 \text{ cm}^3$$



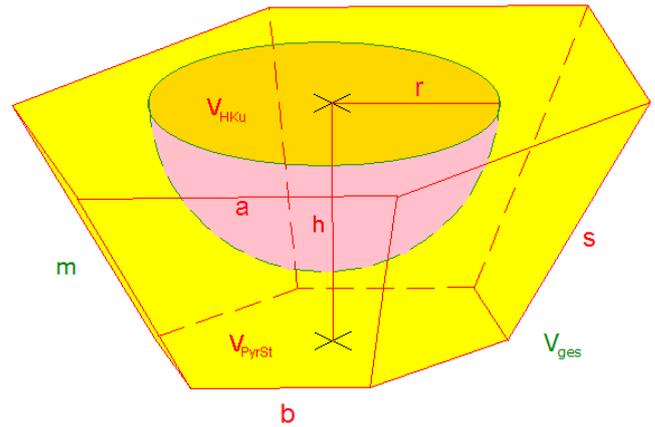
Lösung 1966/1 5b:

4. Berechnung des Gesamtvolumens V_{ges} :

$$V_{\text{ges}} = V_{\text{PyrSt}} - V_{\text{HKu}}$$

$$V_{\text{ges}} = 859732 - 261799$$

$$\underline{\underline{V_{\text{ges}} = 597933 \text{ cm}^3}}$$



5. Berechnung der Trogmasse m:

$$m = V_{\text{ges}} \cdot \rho$$

$$m = 597933 \cdot 2,7$$

$$\underline{\underline{m = 1614419 \text{ g} = 1614,4 \text{ kg} = 1,6 \text{ t}}}$$